Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique quelconque

David Kern

23 mai, 13 et 20 juin 2019

Table des matières

1. Le site infinitésimal en caractéristique 0

1.1. Calcul différentiel algébrique

1.1.1. Le faisceau des parties principales

Soit X un S-schéma de caractéristique 0.

Remarque 1. Toute nos notations seront *relatives* à X, c'est-à-dire qu'un X-schéma $Y \xrightarrow{\pi} X$ sera identifié à l'$\mathscr{O}_X$-algèbre $\pi_*\mathscr{O}_Y$, que par un léger abus [1] nous noterons aussi $\mathscr{O}_{Y/X}$, voire $\mathscr{O}_Y \in \mathscr{O}_X - \mathfrak{Alg}$.

Rappelons que, pour tout X-schéma Y et tout $\mathscr{O}_Y$-module quasicohérent $\mathscr{F}$, une $\mathscr{O}_X$-dérivation à valeurs dans $\mathscr{F}$ est un morphisme d'$\mathscr{O}_X$-algèbres $\mathscr{O}_Y$-augmentées $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}$ vers l'extension de carré nul triviale $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}$, c'est-à-dire une section ($\mathscr{O}_X$-linéaire) de l'augmentation $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F} \to \mathscr{O}_Y$.

Définition 2. *On notera $\mathfrak{Ext}^{\mathrm{nilp,triv}}_{\mathscr{O}_X}$ la catégorie dont les objets sont les paires $(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F})$ d'une $\mathscr{O}_X$-algèbre $\mathscr{O}_Y$ et d'une extension de carré nul triviale $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}$ par un $\mathscr{O}_Y$-module quasicohérent, les morphismes $(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}) \to (\mathscr{O}_Z, \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{G})$ étant les paires d'un homomorphisme $\varphi \colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Z$ et d'un morphisme d'$\mathscr{O}_Y$-algèbres $\mathscr{O}_Z$-augmentées $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F} \to \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{G}$.*

Remarque 3. C'est la catégorie tangente de $\mathscr{O}_X - \mathfrak{Alg} \simeq \mathfrak{TopAnn}^{\mathrm{op}}_{/(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{O}_X)}$, la catégorie des modules de Beck sur les $\mathscr{O}_X$-algèbres.

Propostion 4. *Le foncteur d'oubli $\mathfrak{Ext}^{\mathrm{nilp,triv}}_{\mathscr{O}_X} \to \mathscr{O}_X - \mathfrak{Alg}, (\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}) \mapsto \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}$ admet un adjoint à gauche*

$$Y \mapsto \mathscr{P}^1_{Y/X} \coloneqq \mathscr{O}_{Y \times_X Y}/\mathscr{I}^2 = \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \tag{1}$$

(où l'on a écrit $\mathscr{O}_{Y \times_X Y}$ pour ce qui serait généralement dénoté $\Delta^{-1}\mathscr{O}_{Y \times_X Y}$) où $\mathscr{I} = \ker(\mathscr{O}_{Y \times_X Y} \to \mathscr{O}_Y)$ et $\Delta \colon Y \to Y \times_X Y$ est le comorphisme de $\mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y$, $a \otimes b \mapsto ab$. En outre ce foncteur est une section de la projection $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F} \mapsto \mathscr{O}_Y$.

Corollaire 5. *Notons $\mathfrak{Ext}^{\mathrm{nilp,triv}}(\mathscr{O}_Y)$ la fibre en $\mathscr{O}_Y$; c'est la catégorie des extensions de carré nul triviales de $\mathscr{O}_Y$. Alors l'objet $\mathscr{P}^1_{Y/X}$ coreprésente le foncteur de dérivations $(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}) \mapsto \mathrm{Der}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_Y, \mathscr{F})$.*

Démonstration. Par adjonction on a pour tout $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{F}$ un isomorphisme

$$\hom_{\mathfrak{Ext}}\big((\mathscr{O}_Y, \mathscr{P}^1_{Y/X}), (\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F})\big) \simeq \hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}). \tag{2}$$

Par définition un morphisme $(\mathscr{O}_Y, \mathscr{P}^1_{Y/X}) \to (\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F})$ est une flèche de la fibre $\mathfrak{Ext}^{\mathrm{nilp,triv}}(\mathscr{O}_Y)$ si et seulement si son morphisme $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y$ sous-jacent est l'identité. Cette condition correspond par l'isomorphisme ci-dessus au fait d'imposer que le morphisme d'$\mathscr{O}_X$-algèbres $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}$ associé soit une section de l'augmentation. □

1. Ceci est possible en voyant le topos localement annelé $Y_{\mathrm{Zar}} = (|Y|, \mathscr{O}_Y)$ comme l'image de $(|X|, \pi_*\mathscr{O}_Y)$ par le 2-foncteur de spectre relatif de Hakim.

Définition 6 (Faisceau des parties principales). *Pour tout entier* n *on définit*

$$\mathscr{P}^n_{Y/X} = \mathscr{O}_{Y\times_X Y}/\mathscr{I}^{n+1} \tag{3}$$

*l'**algèbre des parties principales d'ordre** n, faisceau structural du n-ième voisinage infinitésimal de la diagonale de Y. On note aussi $\mathscr{P}^\infty_{Y/X} = \varprojlim_n \mathscr{P}^n_{Y/X}$ le (faisceau structural du) voisinage formel de la diagonale de Y.*

1.1.2. Dérivations et voisinage infinitésimal

Remarque 7. Pour tout $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{M}$, on a

$$\mathscr{O}_{Y\times_X Y} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{M} = \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{M} = \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \ (= a^* a_* \mathscr{M}) \tag{4}$$

(où $a\colon Y \to X$ est le morphisme structural) : on peut donc voir $\mathscr{O}_{Y\times_X Y}$ comme un moyen de comparer l'$\mathscr{O}_Y$-linéarité et l'$\mathscr{O}_X$-linéarité.

Plus précisément, si $\mathscr{N}$ est tout autre $\mathscr{O}_Y$-module, un homorphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ est $\mathscr{O}_Y$-linéaire si et seulement si le noyau de l'application $\mathscr{O}_Y$-linéaire $\mathscr{O}_{Y\times_X Y} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ contient $\mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{M}$.

Dans cette Remarque, on a donné des rôles différents aux deux facteurs $\mathscr{O}_Y$ de $\mathscr{O}_{Y\times_X Y}$: le facteur de droite a été utilisé pour tensoriser avec l'$\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{M}$, tandis que celui de gauche donne la structure d'$\mathscr{O}_Y$-module au résultat. Ceci correspond au fait que $\mathscr{O}_{Y\times_X Y}$ supporte deux structures d'$\mathscr{O}_Y$-algèbres données par les morphismes $t_i\colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$, $i \in \{1, 2\}$, appliquant une section f de $\mathscr{O}_Y$ sur $f \otimes 1$ et $1 \otimes f$ respectivement.

Définition 8. *Ces deux morphismes passent également aux quotients modulo les puissances de $\mathscr{I}$, et donnent donc deux structures d'$\mathscr{O}_Y$-algèbre les faisceaux de parties principales de tous ordres. Elles seront dénotées $t_i^{(n)}\colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{P}^n_{Y/X}$.*

Notons $\Pi^n_{Y/X} = \operatorname{Spec}_X \mathscr{P}^n_{Y/X}$ le n-ième voisinage de Y. Les deux homomorphismes $t_i^{(n)}$ sont les comorphismes des projections canoniques $p_i^{(n)} \coloneqq \mathrm{pr}_i|_{\Pi^n_{Y/X}}\colon \Pi^n_{Y/X} \to Y$ (où $\mathrm{pr}_i\colon Y \times_X Y \to Y$) qui donnent à $\Pi^n_{Y/X}$ deux structures de Y-schéma (et donc $\mathscr{O}_{Y\times_X Y} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{M} = \mathrm{pr}_{1,*}\, \mathrm{pr}_2^* \mathscr{M}$ dans l'Équation 4).

Construction 9. L'$\mathscr{O}_X$-algèbre $\mathscr{P}^n_{Y/X}$ admet une action $s^{(n)} = t_2^{(n)} \otimes t_1^{(n)}$ du groupe symétrique $\mathbb{S}_2$, appelée sa **symétrie canonique**, permutant les deux structures d'$\mathscr{O}_Y$-algèbre : on a $s \circ t_1 = t_2$ et $s \circ t_2 = t_1$.

Remarque 10. Les systèmes de morphismes $\left(p_1^{(n)}\right)_n$ et $\left(p_2^{(n)}\right)_n$ sont à comprendre comme les morphismes de source et cible d'une catégorie en X-schémas formels, et les involutions $\sigma^{(n)}$ comme les morphismes d'inversion qui en font un groupoïde en X-schémas formels.

On fixe désormais une structure d'$\mathscr{O}_Y$-algèbre sur $\mathscr{P}^n_{Y/X}$ (qui sera donc omise de l'écriture), et l'autre morphisme sera simplement dénoté $t^{(n)}\colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{P}^n_{Y/X}$.

Propostion 11. *La dérivation universelle est* $s^{(n)} - \mathrm{id} = (\mathrm{id} - s^{(n)}) \circ t^{(n)}$.

Exemple 12. Notons $\mathfrak{Ext}^{\text{nilp,triv}}(Y)$ la catégorie fibre de $\mathfrak{Ext}^{\text{nilp,triv}}_{\mathscr{O}_X}$ au-dessus de $\mathscr{O}_Y$. Prendre l'idéal d'augmentation d'une extension nilpotente triviale induit une équivalence $\mathfrak{Ext}^{\text{nilp,triv}}(Y) \simeq \mathscr{O}_Y - \mathfrak{Mod}$. Le module correspondant à $\mathscr{P}^1_{Y/X}$ est $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 =: \Omega^1_{Y/X}$, qui par la discussion ci-dessus coreprésente donc les dérivations dans les $\mathscr{O}_Y$-modules.

L'application $t_1^{(1)} - t_2^{(1)} \colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{P}^1_{Y/X} \simeq \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y/\mathscr{I}^2, f \mapsto f \otimes 1 - 1 \otimes f$ se factorise clairement par $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 = \Omega_Y$. Il s'agit de la dérivation universelle $\mathrm{id}_{\Omega^1_{Y/X}}$.

1.1.3. Connexions intégrables et stratifications

Soit $\mathfrak{F} \to \mathfrak{Sch}_{/X,\tau}$ un champ Zariskien, et soit Y un X-schéma. Soit $M \in \mathfrak{F}_Y$ un objet dans la catégorie fibre au-dessus de Y.

Définition 13 (Connexion)**.** *Une **connexion d'ordre** n sur M est un isomorphisme* $p_1^{(n),*}M \xrightarrow{\simeq} p_2^{(n),*}M$ *se réduisant à l'identité par changement de base selon* $Y = V(\mathscr{I}) \hookrightarrow \Pi^n_{Y/X}$.

En notant $p^{(n)} \colon \Pi^n_{Y/X} \to Y$ le morphisme structural induit par le choix de la structure d'$\mathscr{O}_Y$-algèbre sur $\mathscr{P}^n_{Y/X}$ et $\sigma^{(n)} \colon \Pi^n_{Y/X} \to \Pi^n_{Y/X}$ la symétrie déduite de $s^{(n)}$ (permutant donc les deux structures de Y-schéma), une n-connexion correspond à un isomorphisme $p^{(n),*}M \xrightarrow{\simeq} \sigma^{(n),*}p^{(n),*}M$.

Exemple 14 (Connexion sur un faisceau cohérent)*.* Si $\mathscr{M} \in \mathfrak{Coh}_Y$, une n-connexion est un isomorphisme $\mathscr{M} \otimes_{t_1^{(n)}} \mathscr{P}^n_{Y/X} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{M} \otimes_{t_2^{(n)}} \mathscr{P}^n_{Y/X}$ se réduisant à l'identité $\mod \mathscr{I}$.

Soit θ un tel isomorphisme, disons pour $n = 1$. On définit

$$\nabla \coloneqq \theta \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{M}} \otimes t_1^{(1)}) - (\mathrm{id}_{\mathscr{M}} \otimes t_2^{(1)}) \colon \mathscr{M} \to \mathscr{M} \otimes \mathscr{P}^1_{Y/X}; \tag{5}$$

comme $\theta \mod \mathscr{I} = \mathrm{id}_{\mathscr{M}}$ cet homomorphisme de $\mathscr{P}^1_{Y/X}$-modules se factorise bien par $\mathscr{M} \otimes \Omega^1_{Y/X}$ et recouvre la notion classique de connexion.

Définition 15 (Pseudo-stratification)**.** *Une **pseudo-stratification** est un système de n-connexions, $n \geq 0$, compatible à la réduction d'ordre* $\mathscr{P}^{n+\ell}_{Y/X} \twoheadrightarrow \mathscr{P}^n_{Y/X}$.

Pour tout k, dénotons $\Pi^n_{Y/X}(k)$ le voisinage infinitésimal d'ordre n de la diagonale dans la $(k+1)$-uple puissance fibrée de Y sur X, et $\mathscr{P}^n_{Y/X}(k) = \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \cdots \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y/\mathscr{I}^{n+1}$ son faisceau structural. Notons aussi $p^{(n)}_{i_1 \dots i_\ell} \colon \Pi^n_{Y/X}(k) \to \Pi^n_{Y/X}(\ell)$ le morphisme induit (pour $\ell < k$) par la projection sur les facteurs énumérés.

Définition 16 (Intégrabilité)**.** *Une n-connexion* $\theta \colon p_1^{(n),*}M \xrightarrow{\simeq} p_2^{(n),*}M$ *est **intégrable** si elle vérifie la condition de transitivité (ou de cocycle)*

$$\begin{tikzcd}
p_{1,3}^*p_2^*M \arrow[r, equal] \arrow[dr, bend right, "p_{1,3}^*\theta"'] & p_{2,3}^*p_2^*M \arrow[r, "p_{2,3}^*\theta"] & p_{2,3}^*p_1^*M \arrow[r, equal] & p_{1,2}^*p_2^*M \arrow[dl, bend left, "p_{1,2}^*\theta"] \\
& p_{1,3}^*p_1^*M \arrow[r, equal] & p_{1,2}^*p_1^*M &
\end{tikzcd} . \tag{6}$$

*Une **stratification** sur M est une pseudo-stratification dont toutes les composantes sont intégrables.*

Fixons la structure de $\Pi^n_{Y/X}(1)$-schéma sur $\Pi^n_{Y/X}(2)$ donnée par p_{12}, ce qui en composant avec le choix $p_1 \colon \Pi^n_{Y/X}(1) \to Y$ donne une structure de Y-schéma que l'on note p. Le groupe symétrique $\mathbb{S}_3$ opère sur $\Pi^n_{Y/X}(2)$ et permute les trois structures de Y-schéma possibles sur $\Pi^n_{Y/X}(2)$. La condition de transitivité s'interprète alors comme la commutativité de l'hexagone

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \sigma_{321}^* p^* M \arrow[r] \arrow[dl, equal] & \sigma_{231}^* p^* M \arrow[dr, equal] & \\
\sigma_{312}^* p^* M \arrow[dr] & & & \sigma_{213}^* p^* M \arrow[dl] \\
 & \sigma_{132}^* p^* M \arrow[r, equal] & \sigma_{123}^* p^* M = p^* M &
\end{tikzcd} \quad , \tag{7}$$

où σ_{ijk} est le morphisme venant de la permutation $(1,2,3) \mapsto (i,j,k)$.

Remarque 17. On appelle **hyperstratification** sur M une connexion intégrable d'ordre infini, c'est-à-dire un isomorphisme $\theta \colon p_1^{(\infty),*}M \xrightarrow{\simeq} p_2^{(\infty),*}M$ respectant la condition de transitivité. En caractéristique 0, l'idéal $\mathscr{I}$ de (la diagonale de) X dans $\Pi^\infty_{X/S}$ n'est pas nilpotent, donc les hyperstratifications n'apparaissent pas de façon géométrique. Cependant les voisinages d'ordre infini à puissances divisées sont bien des épaississements nilpotents en caractéristique positive, ce qui est pourquoi le site cristallin d'un S-schéma lisse fera apparaître des hyperstratifications à puissances divisées.

Remarque 18. En caractéristique 0, une connexion intégrable d'ordre 1 est équivalente à une stratification. Ce ne sera pas le cas en caractéristique positive, d'où la nécessité de considérer les dérivations de tous ordres.

1.2. Interprétation géométrique

1.2.1. Faisceaux sur le site infinitésimal

Définition 19 (Site infinitésimal)**.** *Le (gros) **site infinitésimal Zariskien** $\mathfrak{Inf}(X/S)$ **de** X **relativement à** S est la catégorie dont*

— *les objets sont les paires d'un X-schéma Y° et d'une immersion fermée nilpotente $Y^\circ \hookrightarrow Y$ dans un S-schéma Y :*

$$\begin{tikzcd}
Y^\circ \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & S
\end{tikzcd} \quad , \tag{8}$$

— *les morphismes $(Y^\circ \hookrightarrow Y) \to (Z^\circ \hookrightarrow Z)$ sont les paires (φ°, φ) d'un X-morphisme*

$\varphi^\circ \colon Y^\circ \to Z^\circ$ *et d'un* S*-morphisme* $\varphi \colon Y \to Z$ *tels que le carré évident*

$$\begin{tikzcd}
& & Y^\circ \arrow[rrr, hook] \arrow[dll, "\varphi^\circ"'] \arrow[ddl] & & & Y \arrow[dll, "\varphi"] \arrow[ddl] \\
Z^\circ \arrow[rrr, hook] \arrow[dr] & & & Z \arrow[dr] & & \\
& X \arrow[rrr] & & & S &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

commute,

munie de la topologie induite par le foncteur $(Y^\circ \hookrightarrow Y) \mapsto (Y^\circ, Y) \in (\mathfrak{Sch}_{/X})_{\mathrm{Zar}} \times (\mathfrak{Sch}_{/S})_{\mathrm{Zar}}$*, c'est-à-dire engendrée par la prétopologie dans laquelle une famille* $\{(\varphi_i^\circ, \varphi_i)\}_i$ *est couvrante si et seulement si* $\{\varphi_i^\circ\}_i$ *et* $\{\varphi_i\}_i$ *sont des familles couvrantes.*

On dit que les objets du site infinitésimal sont des S**-épaississements nilpotents** de X-schémas.

Remarque 20 (Variantes). On s'intéresse également aux sous-sites pleins suivants :

Le petit site infinitésimal $\mathfrak{inf}(X/S)$ est la sous-catégorie pleine sur les $(Y^\circ \hookrightarrow Y)$ tels que $Y^\circ \to X$ est un ouvert Zariski.

Les sites stratifiants $\mathfrak{Strat}(X/S)$ et $\mathfrak{strat}(X/S)$ (que l'on peut également appeler connexifiants en caractéristique 0) sont les sous-catégories pleines sur les $(Y^\circ \to Y, Y^\circ \hookrightarrow Y)$ admettant une rétraction $Y \to X$:

$$\begin{tikzcd}
Y^\circ \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\
X \arrow[r] & S
\end{tikzcd} . \tag{10}$$

Si X/S est lisse, les sites infinitésimal et stratifiant sont équivalents.

Exemple 21 (Comparaison avec la forme de de Rham). Définissons le préfaisceau $X_{\mathrm{dR}} \colon \operatorname{Spec} A \mapsto X(\operatorname{Spec}(A^{\mathrm{red}}))$, où A^{red} est le quotient de A par l'idéal de ses éléments nilpotents (*i.e.* la partie réduite de A) et où X est vu comme son foncteur des points ; c'est en fait un faisceau Zariskien sur S. Plus généralement, pour tout S-schéma Y on a $X_{\mathrm{dR}}(Y) = X(Y^{\mathrm{red}}) = \hom_S(Y^{\mathrm{red}}, X)$ (c'est-à-dire que X_{dR} est l'extension oplaxe de la restriction de X aux S-schémas réduits le long de l'inclusion dans les S-schémas) ; le faisceau X_{dR} est donc étale sur S. On a alors un morphisme de sites $u \colon (\mathfrak{Sch}_{/X_{\mathrm{dR}}})_{\mathrm{Zar}} \to \mathfrak{Inf}(X/S)$, appliquant un morphisme $Y \to X_{\mathrm{dR}}$ sur $(Y^{\mathrm{red}} \to X, Y^{\mathrm{red}} \hookrightarrow Y)$.

Ce morphisme est continu, et induit donc par composition un foncteur $u^* \colon \mathfrak{Faisc}(\mathfrak{Inf}(X/S)) \to \mathfrak{Faisc}_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{Sch}_{/X_{\mathrm{dR}}})$, qui a un adjoint à droite (calculé de manière tautologique) u_* et commute aux limites finies, c'est-à-dire un morphisme géométrique de topoï. En outre, ce morphisme (u^*, u_*) est un isomorphisme de topoï.

Construction 22. Soit $\mathfrak{S}$ l'un des sites définis ci-dessus, et $\mathscr{F}$ un faisceau sur $\mathfrak{S}$. Pour tout $(Y^\circ \to X, Y^\circ \hookrightarrow Y) \in \mathfrak{S}$, on définit un faisceau Zariskien $\mathscr{F}_Y$ sur Y, envoyant tout

Y-schéma $U \to Y$ (pour le gros site, sinon tout ouvert de Zariski $U \subset Y$ pour le petit site) sur $\mathscr{F}(Y^\circ \times_Y U, U)$. Pour tout morphisme $(\overline{\varphi}, \varphi)\colon (Y^\circ \hookrightarrow Y) \to (Z^\circ \hookrightarrow Z)$, on a une flèche de comparaison $\varphi^*_{\mathscr{F}}\colon \varphi^{-1}\mathscr{F}_Z \to \mathscr{F}_Y$, qui est un isomorphisme si φ est une immersion (de sorte que $\mathscr{F}_Y$ soit bien déduit de $\mathscr{F}_Z$ par restriction selon φ). Si (ψ°, ψ) est une flèche composable, on a la compatibilité $(\psi\varphi)^*_{\mathscr{F}} = \varphi^*_{\mathscr{F}} \circ \varphi^{-1}\psi^*_{\mathscr{F}}$.

Ceci est en fait une description des faisceaux sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire que se donner un tel système de faisceaux Zariskiens revient à se donner un faisceau sur $\mathfrak{S}$.

Exemple 23. Le **faisceau structural infinitésimal** (resp. stratifié) est le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{inf}}$ (resp. $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{strat}}$) appliquant $(Y^\circ \hookrightarrow Y)$ sur $\mathscr{O}_Y(Y)$, qui selon la description ci-dessus correspond au système de faisceaux $(\mathscr{O}_Y)_{(Y^\circ \hookrightarrow Y) \in \mathfrak{S}}$. Il a également un faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_{X/S,\mathrm{inf}}$ (resp. $\mathscr{I}_{X/S,\mathrm{strat}}$) obtenu en associant à $(Y^\circ \hookrightarrow Y)$ le faisceau idéal $\ker(\mathscr{O}_Y \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{Y^\circ})$ de Y° dans $\mathscr{O}_Y$.

Définition 24 (Topos infinitésimal)**.** *Le gros (resp. petit)* ***topos infinitésimal*** *(resp.* ***stratifiant****) de X relativement à S est le topos présenté par le gros (resp. petit) site infinitésimal (resp. stratifiant), c'est-à-dire la catégorie des faisceaux d'ensembles dessus. On le considère comme un topos annelé par $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{inf}}$ (resp. $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{strat}}$), et même comme un topos annelé muni d'un idéal.*

1.2.2. Les cristaux

Définition 25 (Cristal)**.** *Soit $\mathfrak{F}$ un champ sur $\mathfrak{Strat}(X/S)$. Un $\mathfrak{F}$-**cristal** est une section cartésienne de $\mathfrak{F}$.*

Construction 26. On s'intéresse généralement aux champs induits par des champs sur $\mathfrak{Sch}_{/X,\mathrm{Zar}}$. Si $\mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{Sch}_{/X}$ est un champ Zariskien, on définit un champ $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{Strat}(X/S)$ en envoyant $(Y^\circ \to X, Y^\circ \hookrightarrow Y)$ sur la fibre de $\mathfrak{F}_0$ en Y. Un $\mathfrak{F}$-cristal est appelé un **cristal en objets de** $\mathfrak{F}_0$.

On peut donner une interprétation des cristaux dans l'esprit de celles donnée précédemment pour les faisceaux sur le site stratifiant. Si M est un cristal en objets de $\mathfrak{F}_0$, on définit pour tout $(Y^\circ \hookrightarrow Y)$ une section cartésienne M_Y du changement de base $\mathfrak{F}_0 \times_X Y$ par un procédé similaire (c'est-à-dire $M_Y(U \to Y) = M(Y^\circ \times_Y U \hookrightarrow Y))$, avec des morphismes de comparaison relevant les morphismes de $\mathfrak{Strat}(X/S)$. Les cristaux obtenus de cette façon font toutefois preuve d'une plus grande rigidité que les cristaux généraux, puisque les morphismes de comparaison doivent être des isomorphismes.

Remarque 27. Si l'on s'intéressait aux cristaux sur le site infinitésimal plutôt que sur le site stratifiant, $\mathfrak{F}_0$ devrait être défini sur $\mathfrak{Sch}_{/S}$ au lieu de $\mathfrak{Sch}_{/X}$.

Exemple 28. Le faisceau structural infinitésimal (ou stratifié) $\mathscr{O}_{X/S}$ est un cristal en anneaux quasicohérents. Son faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_{X/S}$ n'est pas un cristal.

Propostion 29. *Il existe une équivalence entre la catégorie des objets de la catégorie fibre $\mathfrak{F}_{0,X}$ munis d'une stratification (relative à S) et la catégories des cristaux en objets de $\mathfrak{F}_0$ (i.e. des $\mathfrak{F}$-cristaux).*

Remarque 30. X étant l'objet final de $\mathfrak{S}$, la fibre $\mathfrak{F}_{0,X}$ est la catégorie des sections cartésiennes de $\mathfrak{F}_0$. En général, le site stratifiant (ou infinitésimal) n'admet pas d'objet final.

Lemme 31 ([Ber74, Proposition I.4.2.2.i]). *Pour toute paire* $(\overline{Z}, \mathscr{I}_Z)$ *d'un* S*-schéma* $\overline{Z}$ *et un idéal quasicohérent* $\mathscr{I}_Z$ *définissant un sous-schéma fermé* Z *de* $\overline{Z}$*, notons* $\mathscr{P}^n(Z \hookrightarrow \overline{Z}) = \mathscr{O}_{\overline{Z}}/\mathscr{I}_Z^{n+1}$*, dans laquelle l'image de* $\mathscr{I}_Z$ *est nilpotente d'ordre* n*, et notons* $\Pi^n(Z \hookrightarrow \overline{Z})$ *son spectre relatif sur* $\overline{Z}$*, le voisinage infinitésimal d'ordre* n *de* Z *dans* $\overline{Z}$*.*

Alors le foncteur $(\overline{Z}, \mathscr{I}_Z) \mapsto (\Pi^n(Z \hookrightarrow \overline{Z}), \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^{n+1})$ *est adjoint à droite du foncteur d'oubli voyant une paire* $(Y, \mathscr{I}_{Y^\circ})$ *avec* $\mathscr{I}_{Y^\circ}$ *nilpotent d'ordre* n *simplement comme une paire.*

Explicitement, pour toute paire $(\overline{Z}, \mathscr{I}_Z)$ *et tout épaississement* $(Y, \mathscr{I}_{Y^\circ})$ *nilpotent d'ordre* n*, pour tout morphisme* $(Y^\circ \to Z, Y \to \overline{Z})$ *de paires il existe un unique morphisme* $Y \to \Pi^n(Z \hookrightarrow \overline{Z})$ *faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
Y^\circ \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d, dashed, "\exists!"'] \arrow[ddr, bend left] & \\
Z \arrow[r, hook] \arrow[drr, hook, bend right] & \Pi^n(Z \hookrightarrow \overline{Z}) \arrow[dr] & \\
& & \overline{Z}
\end{tikzcd} . \tag{11}$$

Corollaire 32 ([Ber74, Proposition I.4.3.3.i]). *Soit* $(q\colon Y^\circ \to X, i\colon Y^\circ \hookrightarrow Y)$ *un* S*-épaississement de* X*-schéma nilpotent d'ordre* n*. Soient* $f_1, \dots, f_{k+1}\colon Y \to X$ *des* S*-morphismes tels que pour tout* $j \in \{1, \dots, k+1\}$ *on ait* $f_j \circ i = q$*.*

Alors il existe un unique S*-morphisme* $f\colon \Pi^n_{X/S}(k)$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
Y^\circ \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\
X \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal, bend right] & \Pi^n_{X/S}(k) \arrow[dr, "p_j^{(n)}"'] & \\
& & X
\end{tikzcd} \tag{12}$$

soit commutatif pour tout $j \in \{1, \dots, k+1\}$*.*

Démonstration. Il s'agit simplement du lemme précédent, appliqué à l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times_S \cdots \times_S X$, et combiné à la propriété universelle du produit fibré. $\square$

Démonstration (de la Proposition 29). Si M est un $\mathfrak{F}$-cristal, sa valeur $M(X \hookrightarrow X) \in \mathfrak{F}_{0,X}$ est canoniquement munie d'une stratification. En effet, les inclusions de X dans les voisinages infinitésimaux $\Pi^n_{X/S}$ de sa diagonale définissent des objets de $\mathfrak{Strat}(X/S)$, et les projections $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}\colon \Pi^n_{X/S} \to X$ définissent bien deux morphismes $(\mathrm{id}_X, p_i^{(n)})\colon (X \hookrightarrow \Pi^n_{X/S}) \to (X \hookrightarrow X)$. Comme M est un cristal on a pour tout n des isomorphismes $(\mathrm{id}_X, p_1^{(n)})^* M(\mathrm{id}_X) \simeq M(\mathrm{id}_X)$ et $M(\mathrm{id}_X) \simeq (\mathrm{id}_X, p_2^{(n)})^* M(\mathrm{id}_X)$, dont la composée est une n-connexion, et que l'on assemble en une stratification.

Supposons à l'inverse donné un objet $M_0 \in \mathfrak{F}_{0,X}$ muni d'une stratification $(\theta_n)_n$, et soit $(Y^\circ \to X, Y^\circ \hookrightarrow Y)$ un objet de $\mathfrak{Strat}(X/S)$. Par hypothèse il existe une rétraction $h\colon Y \to X$, et l'on peut alors définir $M(Y^\circ \hookrightarrow Y) = h^*M_0$, les isomorphismes pour la structure de cristal étant fournis par la stratification. Il reste simplement à vérifier que la stratification assure que cette construction ne dépend pas du choix de h. En effet, si $g\colon Y \to X$ est une autre rétraction, il existe, d'après la propriété universelle (Corollaire 32) des parties principales, un unique morphisme $\phi\colon Y \to \Pi^n_{X/S}$ (où l'idéal de Y° dans Y est nilpotent d'ordre n) tel que $h = p_1^{(n)} \circ \phi$ et $g = p_2^{(n)} \circ \phi$. Alors $\phi^*\theta\colon \phi^*p_1^{(n),*}M_0 \xrightarrow{\simeq} \phi^*p_2^{(n),*}M_0$ induit bien l'isomorphisme voulu entre h^*M_0 et g^*M_0, d'une façon qui par intégrabilité de $(\theta_n)_n$ respecte bien les conditions de cocycle définissant un cristal. □

Remarque 33. Étant donné une S-immersion $i\colon X \to \overline{X}$, on peut plus généralement définir le site i-stratifiant de X/S comme le site des épaississements nilpotents $(Y^\circ \hookrightarrow Y)$ admettant une rétraction $Y \to \overline{X}$ (le site stratifiant défini plus haut étant donc le site id_X-stratifiant). Dans ce cas, pour $\mathfrak{F}_0$ un champ sur le site Zariskien de $\overline{X}$, on obtient une équivalence de catégories entre les cristaux en objets de $\mathfrak{F}_0$ et les objets de la fibre de $\mathfrak{F}_0$ sur le voisinage formel de X dans $\overline{X}$ munis d'une stratification (qui est alors définie en termes des voisinages infinitésimaux de X dans $\overline{X} \times_S \overline{X}$), dès lors que ce voisinage formel est nilpotent (ce qui nécessite des hypothèses de torsion sur X, donc de travailler en caractéristique positive). En l'absence de torsion, il faut considérer les systèmes les systèmes d'objets des fibres de $\mathfrak{F}_0$ sur les voisinages de tous ordres.

Cette généralité supplémentaire sera utile pour étudier la relation entre la cohomologie cristalline de X/S et sa cohomologie de de Rham, en le plongeant dans un S-schéma lisse $\overline{X}$.

Remarque 34. On peut voir une n-connexion intégrable comme une « donnée de descente à l'ordre n » pour le morphisme $X \to S$.

Plus précisément, une stratification s'interprète comme une donnée de descente de X à X_{dR} : pour qu'un objet sur X descende à un cristal sur X_{dR} il doit être muni d'une connexion intégrable garantissant la rigidité grâce au transport parallèle qui relie des points infinitésimalement proches.

2. Algèbre à puissances divisées

2.1. Définition et propriétés élémentaires

2.1.1. Idéaux à puissances divisées

Définition 35. *Soit $\mathfrak{T}$ un topos. Une **algèbre à puissances divisées**, ou Γ-algèbre, est un anneau (commutatif) non unifère $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{T}$ muni d'applications $\gamma_n\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ pour tout $n > 0$ telles que, pour toutes sections x et y de $\mathcal{I}$:*

1. $\gamma_1(x) = x$,
2. $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!}\gamma_{n+m}(x)$,
3. $\gamma_n(xy) = n!\gamma_n(x)\gamma_n(y)$,

4. $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i(x)\gamma_{n-i}(y)$,
5. $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}\gamma_{nm}(x)$.

On dit aussi que $\mathcal{I}$ est muni d'une Γ-structure.

Corollaire 36. *Pour toute section x et tout $n > 0$, on a $n!\gamma_n(x) = x^n$.*

Démonstration. Par récurrence sur n, puisque $\frac{(n+1)!}{n!}\gamma_{n+1}(x) = \gamma_n(x) \cdot x$. □

La catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres non unifères, pour tout anneau $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{T}$, est équivalente à celle des $\mathcal{O}$-algèbres (unifères) augmentées sur $\mathcal{O}$, l'algèbre non unifère $\mathcal{I}$ étant simplement l'idéal d'augmentation de l'$\mathcal{O}$-algèbre obtenue en lui rajoutant une unité. Mais se restreindre à ne considérer que les idéaux d'augmentations d'$\mathcal{O}$-algèbres nous contraindrait à n'étudier que des points fermés de Spec $\mathcal{O}$-schémas. Nous devons donc introduire des structures à puissances divisées sur des idéaux quelconques d'$\mathcal{O}$-algèbres.

Définition 37. *On travaille maintenant dans un topos annelé $(\mathfrak{T}, \mathcal{O})$. Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre. Un Γ-idéal est la donnée d'un idéal $I \subset A$ et d'une Γ-structure sur I. On pose aussi $\gamma_0 \colon x \mapsto 1$.*

Un morphisme $(A, I, \gamma) \to (B, J, \delta)$ est $f \colon (A, I) \to (B, J)$ tel que $f\gamma_n = \delta_n f$. On a donc une catégorie $\Gamma - \mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}}$ des $\mathcal{O}$-algèbres munies d'un idéal à puissances divisées.

Propostion 38 (nilpotence des Γ-idéaux en caractéristique p)**.** *Supposons p nilpotent dans A/I, et I muni d'une Γ-structure. Alors I est localement nilpotent (i.e. toute section x est nilpotente) si et seulement si p est nilpotent dans A. (Rappelons que lorsque A est noethérien, I est localement nilpotent si et seulement si il est nilpotent).*

Démonstration. Si p est nilpotent dans A, *i.e.* il existe n tel que $p^n = 0$, alors pour tout $x \in I$ on a $x^{p^n} = p^n!\gamma_{p^n}(x) = 0$.

Si I est localement nilpotent, comme p est nilpotent dans A/I une de ses puissances est dans I et donc nilpotente, ce qui implique que p est nilpotent dans I. □

Définition 39 (torsion locale)**.** *On dit que A est **de torsion** si il est localement (dans $\mathfrak{T}$) de caractéristique positive.*

Exemple 40.
— Si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que I soit nilpotent d'ordre n et que $(n-1)! \in A^\times$, d'après le Corollaire 36 il existe au moins une Γ-structure sur I donnée par $\gamma_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ pour $k < n$ et $\gamma_k(x) = 0$ pour $k \geq n$.
  Si A est de caractéristique 0, tout idéal admet au plus une Γ-structure, nécessairement donnée par $\gamma_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, et celle-ci existe donc si et seulement si ces éléments de Frac A sont dans A.
  On voit au contraire que si A est (localement) de caractéristique positive p, une Γ-structure ne peut exister sur un idéal I que si celui-ci est localement nilpotent d'ordre p, c'est-à-dire que pour toute section x de I on a $x^p = 0$.
— Si A est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, l'idéal pA admet une Γ-structure donnée par $\gamma_n(px) = \frac{p^n}{n!}x^n$.

— Soit A un anneau de valuation discrète de caractéristique mixte (c'est-à-dire que la caractéristique du corps résiduel est $p > 0$). Alors on montre à l'aide de théorie des valuations [Ber74, Proposition I.1.2.2] que la Γ-structure unique sur l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ existe si et seulement si A est peu ramifié, c'est-à-dire que l'indice de ramification absolu e (tel que $p = u\varpi^e$ pour ϖ une uniformisante, *i.e.* $\mathfrak{m} = (\varpi)$, et $u \in A^\times$) est $\leq p-1$.
  C'est en particulier le cas lorsque $\mathfrak{m}$ est engendré par p, où l'on dit que A est un anneau de Cohen. Par exemple $A = W_p(k)$ est les vecteurs de Witt p-typiques d'un corps parfait k de caractéristique p.
— Si A est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, on peut montrer à l'aide de développements p-adiques que toute Γ-structure γ est déterminée par la seule application γ_p.
— Soit $A_\bullet$ une algèbre simpliciale augmentée. Alors $\pi_\bullet A$ est une Γ-algèbre (graduée).
— Soient (A, I, γ) un Γ-anneau et M un A-module. Alors $(a, m) \mapsto (\gamma_n(a), \gamma_{n-1}(a)m)$ définit par [Stacks, Tag 07HH] une structure de puissances divisées sur $(A\oplus M, I \oplus M)$, telle que le morphisme canonique $A \to A \oplus M$ définisse un Γ-morphisme.
  Soit N un autre A-module, muni d'une application A-bilinéaire $\mu\colon M \times M \to N$ (par exemple A, M et N peuvent être les composantes de degrés 0, 1 et 2 d'une algèbre associative graduée). On peut alors définir l'extension $A \oplus M \oplus_\mu N$ avec la structure d'algèbre

$$(a, m, n)(b, p, q) = (ab, ap + bm, aq + bn + \mu(m, p) + \mu(p, m)), \tag{13}$$

  et par [Stacks, Tag 07HI] munir l'idéal $I \oplus M \oplus_\mu N$ d'une Γ-structure par

$$(a, m, n) \mapsto (\gamma_i(a), \gamma_{i-1}(a)m, \gamma_{i-1}(a)n + \gamma_{i-2}(a)\mu(m, m)). \tag{14}$$

Propostion 41 ([Stacks, Tags 07GV, 07GX])**.** *La catégorie des anneaux à puissances divisées est bicomplète, et le foncteur d'oubli dans la catégorie des anneaux crée les limites.*

2.1.2. Extensions et structures compatibles

Pour définir les enveloppes à puissances divisées, il est utile de considérer des morphismes entre Γ-anneaux plus généraux que les Γ-morphismes.

Définition 42 (Extension des puissances divisées)**.** *Soit* (A, I, γ) *une* Γ*-algèbre, et* B *une* A*-algèbre. On dit que* γ ***s'étend*** *à* B *s'il existe une* γ*-structure* $\overline{\gamma}$ *sur* (B, IB) *telle que* $(A, I, \gamma) \to (B, IB, \overline{\gamma})$ *soit un* Γ*-morphisme.*

Lemme 43. *Soient* $f\colon A \to B$ *un morphisme d'*$\mathcal{O}$*-algèbres, et soient* (I, γ) *et* (J, δ) *des* Γ*-idéaux de* A *et* B*. Les deux propositions sont équivalentes :*
— γ *s'étend à* B*, et* $\overline{\gamma} = \delta$ *sur* $J \cap IB$*,*
— *il existe une* Γ*-structure* $\overline{\delta}$ *sur* $J + IB$ *telle que* $(A, I, \gamma) \to (B, J + IB, \overline{\delta})$ *et* $(B, J, \delta) \to (B, J + IB, \overline{\delta})$ *soient des* Γ*-morphismes*
Alors $\overline{\delta}$ *est unique, et on dit que* f *est* ***compatible*** *à* γ *et* δ*.*

Exemple 44. Soient (A, I, γ) une Γ-algèbre et $A \to B \to A$ une A-algèbre augmentée. Toute Γ-structure sur l'idéal d'augmentation est compatible.

Définition 45. *Supposons $\mathcal{O}$ munie d'un Γ-idéal $(\mathcal{I}_0, \gamma_0)$. On note $\Gamma - \mathfrak{Alg}^{\mathrm{comp}}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0,\gamma_0)}$ la sous-catégorie pleine de $\Gamma - \mathfrak{Alg}_{\mathcal{O}}$ sur les (A, I, γ) tels que le morphisme structural $\mathcal{O} \to A$ soit compatible à γ_0 et γ.*

On note aussi $\Gamma - \mathfrak{Alg}^{\Gamma}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0,\gamma_0)}$ la sous-catégorie pleine sur les (A, I, γ) tels que $\mathcal{O} \to A$ définisse un Γ-morphisme $(\mathcal{O}, \mathcal{I}_0, \gamma_0) \to (A, I, \gamma)$.

On note également $\mathfrak{AlgId}_{\mathcal{O}}$ la catégorie dont les objets sont les paires (A, I) d'une $\mathcal{O}$-algèbre A munie d'un idéal $I \subset A$ et les flèches sont les morphismes d'algèbres induisant un homomorphisme sur les idéaux, et $\mathfrak{AlgId}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0)}$ la sous-catégorie pleine sur les (A, I) tels que $\mathcal{I}_0 A \subset I$. On dispose donc de foncteurs d'oubli des puissances divisées $\mathcal{oub}_{\gamma_0} \colon \Gamma - \mathfrak{Alg}^{\mathrm{comp}}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0,\gamma_0)} \to \mathfrak{AlgId}_{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{oub}^{\Gamma}_{\gamma_0} \colon \Gamma - \mathfrak{Alg}^{\Gamma}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0,\gamma_0)} \to \mathfrak{AlgId}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0)}$.

Théorème 46 ([Ber74, Théorème I.2.4.1])**.** *Le foncteur $\mathcal{oub}_{\gamma_0}$ admet un adjoint à gauche $\mathcal{D}^{\infty}_{\gamma_0}$, qui se restreint sur $\mathfrak{AlgId}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0)}$ à un adjoint à gauche de $\mathcal{oub}^{\Gamma}_{\gamma_0}$. Pour toute paire (A, I), on appelle $\mathcal{D}^{\infty}_{\gamma_0}(A, I)$ l'**enveloppe à puissances divisées** de A le long de I compatible à γ_0.*

Sans en démontrer l'existence, nous allons étudier dans la prochaine sous-section la structure de ces complétions à puissances divisées.

2.2. Enveloppes à puissances divisées

2.2.1. Structure des enveloppes d'ordre infini

Exemple 47 (Algèbre des puissances divisées, [Ber74, Proposition I.2.5.2])**.** Pour tout $\mathcal{O}$-module M, l'algèbre libre $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}}(M)$ (avec sa graduation oubliée) est naturellement augmentée sur $\mathrm{Sym}^0_{\mathcal{O}}(M) \simeq \mathcal{O}$, avec idéal d'augmentation $\mathrm{Sym}^+_{\mathcal{O}}(M) = \bigoplus_{i>0} \mathrm{Sym}^i_{\mathcal{O}}(M)$. Le foncteur $\mathcal{D}^{\infty}_{\gamma_0} \circ (\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}}, \mathrm{Sym}^+_{\mathcal{O}})$ est donc adjoint à gauche de $(A, I, \gamma) \mapsto I$. On note généralement $\Gamma_{\mathcal{O}}(M)$ l'algèbre des puissances divisées sur un $\mathcal{O}$-module M, avec la Γ-structure notée $x \mapsto x^{[n]}$ sur l'idéal universel $\Gamma^+_{\mathcal{O}}(M)$ (défini également grâce à une graduation naturelle sur $\Gamma_{\mathcal{O}}(M)$).

Plus explicitement, on a une décomposition $\Gamma_{\mathcal{O}}(M) = \sum_{i=0}^{n} \Gamma^i_{\mathcal{O}}(M)$ où le $\mathcal{O}$-module $\Gamma^i_{\mathcal{O}}(M)$ est engendré par les termes $x_1^{[j_1]} \cdots x_\ell^{[j_\ell]}$, avec les $x_k \in M$ et $\sum_{k=1}^{\ell} j_k = i$. Ce module est libre dès que M l'est, avec une base formée par les termes où l'ensemble x_k parcourt une base de M.

Construction 48 ([Ber74, Théorème 2.3.1])**.** Soit $(A, I) \in \mathfrak{AlgId}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0)}$, et notons $\alpha \colon \mathcal{O} \to A$ le morphisme structural. Alors l'$\mathcal{O}$-algèbre sous-jacente de $\mathcal{D}^{\infty}_{\gamma_0}(A, I)$ est le quotient de $\Gamma_A(I)$ par l'idéal engendré par les familles $(x^{[1]} - x)_{x \in I}$ (où l'on note $x^{[1]} \in \Gamma^1_A(I) = I$ et $x \in \Gamma^0_{\mathcal{O}}(I) = A$) et $\left(\alpha(f)^{[n]} - \alpha(\gamma_{0,n}(f))\right)_{f \in \mathcal{O}, n \in \mathbb{N}}$, qui est bien un sous-$\Gamma$-idéal de $\Gamma^+_A(I)$. Son Γ-idéal $\bar{I}$ est l'image de $\Gamma^+_A(I)$ dans le quotient, et les puissances divisées $(-)^{[n]}$ passent bien au quotient pour définir une Γ-structure sur $\bar{I}$.

Construction 49 ([Ber74, Théorème 2.4.1])**.** Si $(A, I) \in \mathfrak{AlgId}_{\mathcal{O}}$, on obtient $\mathcal{D}^{\infty}_{\gamma_0}(A, I)$ en appliquant la construction précédente à l'objet $(A, I + \mathcal{I}_0 A)$ de $\mathfrak{AlgId}_{(\mathcal{O},\mathcal{I}_0)}$.

Propostion 50. *1. [Ber74, Proposition I.2.6.1] Soit $(A, I) \in \mathfrak{AlgId}_{\mathcal{O}}$ une paire. Si il existe une surjection d'$\mathcal{O}$-algèbres $A \twoheadrightarrow B$ de noyau I admettant localement une section telle* *que γ_0 s'étend à* B*, il existe un isomorphisme canonique* $\mathscr{D}_0^\infty(A, I) \simeq \mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A, I)$*, où* $\mathscr{D}_0^\infty$ *désigne l'enveloppe à puissances divisées relativement au* Γ*-idéal de compatibilité* $(0, 0)$.

2. *Soit* (A, I) *une paire et soit* J *un idéal de* A *contenu dans* $\ker(A \mapsto \mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A, I))$*. On a un isomorphisme canonique* $\mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A, I) \simeq \mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(B/J, I/(I \cap J))$.

Corollaire 51. *Si* A *est de torsion et* I *localement de type fini, il existe localement un entier* n_0 *tel que pour tout* $n \geq n_0$, $\mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A, I) \simeq \mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A/I^n, I/I^n)$.

2.2.2. Filtration par ordres et Γ-nilpotence

Construction 52 (Filtration γ-adique). Soit (A, I, γ) un Γ-anneau. Pour tout n, on note $I^{[m]}$ l'idéal de A engendré par les sections de la forme $\gamma_{i_1}(x_1) \cdots \gamma_{i_k}(x_k)$ avec x_{i_j} des sections de I et $\sum_{j=1}^k i_j \geq n$. On définit ainsi une filtration descendante sur A, avec $I^{[0]} = A$ et $I^{[1]} = I$. On l'appelle la **filtration γ-adique**.

Exemple 53 ([Ber74, I.3.2.2]). La filtration $[\cdot]$-adique sur $\Gamma_{\mathscr{O}}(M)$ est la filtration associée à la graduation par les $\Gamma_{\mathscr{O}}^n(M)$.

Remarque 54 (Graduation sur les envelopes d'ordre infini). Soit (A, I) une paire ; le gradué associé à la filtration I-adique sur A permet de définir une paire $(\mathrm{gr}_I(A), \mathrm{gr}_I^+(A))$. On a alors, selon [Ber74, Proposition I.3.4.1], un Γ-morphisme surjectif $\mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(\mathrm{gr}_I(A), \mathrm{gr}_I^+(A)) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{[\cdot]}(\mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A, I))$ vers le gradué associé à la filtration $[\cdot]$-adique.

Si en outre I est régulier (*i.e.* localement d'intersection complète), alors par [Ber74, Proposition I.3.4.4] cette Γ-$\mathscr{O}$-algèbre graduée est Γ-isomorphe à $\Gamma_{A/I}(I/I^2)$.

Définition 55. 1. *Un* Γ*-anneau* (A, I, γ) *est* ***quasi-Γ-nilpotent*** *d'ordres* (m, n) *si* $mI^{[n]} = 0$.

2. (A, I, γ) *est* ***Γ-nilpotent d'ordre*** n *s'il est quasi-*Γ*-nilpotent d'ordres* $(1, n)$*, c'est-à-dire que* $I^{[n]} = 0$.

On dit simplement que (A, I, Γ) *est quasi-*Γ*-nilpotent (resp.* Γ*-nilpotent) s'il existe des entiers* m, n *tels que* (A, I, γ) *soit quasi-*Γ*-nilpotent d'ordres* (m, n) *(resp.* Γ*-nilpotent d'ordre* n*).*

Théorème 56 ([Ber74, Proposition I.3.3.1])**.** *Soit* $\Gamma - \mathfrak{Alg}^{m,n}_{(\mathscr{O}, \mathscr{I}_0, \gamma_0)}$ *la sous-catégorie pleine de* $\Gamma - \mathfrak{Alg}^{\mathrm{comp}}_{(\mathscr{O}, \mathscr{I}_0, \gamma_0)}$ *sur les* Γ*-*$\mathscr{O}$*-algèbres quasi-*Γ*-nilpotentes d'ordres* $(m, n+1)$*. La restriction du foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche* $\mathscr{D}_{\gamma_0}^{m,n}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le foncteur appliquant une Γ-$\mathscr{O}$-algèbre (A, I, γ) sur l'algèbre quasi-Γ-nilpotente $(A/mI^{[n+1]}, I/mI^{[n+1]}, [\gamma])$ (où $[\gamma]$ désigne la structure quotient) est bien adjoint à gauche de l'inclusion $\Gamma - \mathfrak{Alg}^{m,n}_{(\mathscr{O}, \mathscr{I}_0, \gamma_0)} \hookrightarrow \Gamma - \mathfrak{Alg}^{\mathrm{comp}}_{(\mathscr{O}, \mathscr{I}_0, \gamma_0)}$. □

On a donc $\mathscr{D}_{\gamma_0}^{m,n}(A, I) = \mathscr{D}_{\gamma_0}^\infty(A, I)/m\bar{I}^{[n+1]}$ pour toute paire (A, I). On écrira aussi $\mathscr{D}_{\gamma_0}^n := \mathscr{D}_{\gamma_0}^{1,n}$ pour l'enveloppe γ-nilpotente.

Propostion 57 ([Ber74, Corollaire I.3.3.3])**.** *Pour toute paire* (A, I) *on a un isomorphisme canonique* $\mathscr{D}_{\gamma_0}^n(A, I) \simeq \mathscr{D}_{\gamma_0}^n(A/I^{n+1}, I/I^{n+1})$.

3. Cohomologie du topos cristallin

Définition 58. *Un **morphisme de topoï à puissances divisées** $(\mathfrak{T}, \mathscr{O}, \mathscr{I}, \gamma) \to (\mathfrak{U}, \mathscr{P}, \mathscr{J}, \delta)$ est un morphisme de topoï annelés $\varphi\colon (\mathfrak{T}, \mathscr{O}) \to (\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ tel que $\varphi^{-1}\mathscr{P} \to \mathscr{O}$ soit un Γ-morphisme.*

*Un Γ-schéma est un schéma S muni d'un idéal quasicohérent $\mathscr{I}$ avec une structure de puissances divisées γ, de sorte que son topos Zariskien, annelé par $\mathscr{O}_S$, ait une structure de Γ-topos. Un **morphisme de Γ-schémas** est un morphisme de schémas induisant un morphisme de Γ-topoï sur les topoï Zariskiens.*

On se fixe un Γ-schéma de base $(S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$, et on note S_0 le sous-schéma fermé défini par l'idéal $\mathscr{I}_0$, dit le Γ-idéal **de compatibilité**. Soit également X un S-schéma, tel que les puissances divisées γ_0 s'étendent à X; on note $X_0 = X \times_S S_0$ sa réduction modulo $\mathscr{I}_0$, qui est un S_0-schéma.

3.1. Le topos cristallin

3.1.1. Calcul différentiel à puissances divisées sur les schémas

Lemme 59 ([Ber74, Proposition I.4.2.1])**.** *Soit $i\colon Z \to Y$ une immersion : il existe donc une factorisation par une immersion fermée $Z \hookrightarrow U$, correspondant à un idéal $\mathscr{I}_Z \subset \mathscr{O}_U$, suivie d'une immersion ouverte $U \hookrightarrow Y$. Supposons que les puissances divisées γ s'étendent à Z. Alors, pour tout entier $n \in$, l'$\mathscr{O}_Y$-algèbre $\mathscr{D}^n_\gamma(\mathscr{O}_U, \mathscr{I}_Z)$ ne dépend pas du choix de U. On la notera donc $\mathscr{D}^n_\gamma(\mathscr{O}_Y, \mathscr{I}_Z)$.*

Si $\mathscr{O}_Y$ est de torsion, il en est de même de $\mathscr{D}^\infty_\gamma(\mathscr{O}_U, \mathscr{I}_Z)$, qui est alors aussi notée $\mathscr{D}^\infty_\gamma(\mathscr{O}_Y, \mathscr{I}_Z)$.

Propostion 60 ([Ber74, Proposition I.4.1.1, Corollaire I.4.1.2])**.** *Soit $\mathscr{B}$ une $\mathscr{O}_Y$-algèbre quasicohérente et soit $\mathscr{J}$ un idéal quasicohérent de $\mathscr{B}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'$\mathscr{O}_Y$-algèbre $\mathscr{D}^n_{\gamma_0}(\mathscr{B}, \mathscr{J})$ est quasicohérente, et donc son spectre relatif est bien affine sur Y.*

Définition 61. *Soit $Z \to Y$ une immersion. On appelle **voisinage infinitésimal à puissances divisées d'ordre n compatibles à γ de Z dans Y**, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le Y-schéma (affine) $D^n_\gamma(Z \hookrightarrow Y) \coloneqq \mathrm{Spec}_Y(\mathscr{D}^n_\gamma(\mathscr{O}_Y, \mathscr{I}_Z))$.*

Définition 62 (Parties principales à puissances divisées)**.** *Soit Y un X-schéma tel que les puissances divisées γ_0 s'étendent à Y. On note $D^n_{Y/X,\gamma_0}(k)$ le n-ième voisinage à puissances divisées de la diagonale Y dans la puissance cartésienne $(k+1)$-ième de Y sur X. Le **schéma des parties principales d'ordre n à puissances divisées** est $D^n_{Y/X,\gamma_0} = D^n_{Y/X,\gamma_0}(1)$.*

Si Y/X est séparé ou si Y est de torsion, on définit de même les schémas de parties principales à puissances divisées d'ordre infini $D^\infty_{Y/X,\gamma_0}(k)$ et $D^\infty_{Y/X,\gamma_0}$.

On note bien sûr $\mathscr{D}^n_{Y/X,\gamma_0}(k)$ (pour $n \in \mathbb{N} \cup \infty$) les algèbres de Γ-parties principales, leurs faisceaux structuraux.

Propostion 63 ([Ber74, Corollaire I.4.4.2])**.** *Pour tout n (voire $n = \infty$ si Y est de torsion ou séparé sur X) le morphisme $D^n_{Y/X,\gamma_0}(k) \to D^n_{Y/X,0}(k)$ est un isomorphisme.*

En particulier on a ([Ber74, Corollaire I.4.4.3]) des isomorphismes $\Pi^1_{Y/X}(k) \xrightarrow{\simeq} D^1_{Y/X,\gamma}(k)$.

Propostion 64 ([Ber74, II.(1.1.17)]). *On a un isomorphisme canonique* $\mathscr{D}^{n}_{\gamma_0}(\mathscr{P}^{n}_{Y/X}, \mathscr{I}_{\Delta(Y)}) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{D}^{n}_{Y/X,\gamma_0}$, *où* $\mathscr{I}_{\Delta(Y)}$ *dénote l'idéal d'augmentation de* $\mathscr{P}^{n}_{Y/X}$.

Le système des $D^{n}_{Y/X,\gamma_0}$ ($n \in \mathbb{N}$) admet ainsi également une structure de groupoïde en schémas formels, donnée par les projections $p^{(n)}_{i} \colon D^{n}_{Y/X,\gamma_0} \to Y$ et la symétrie $s^{(n)}$ qui les intervertit.

Définition 65 (Connexion à puissances divisées). *Soit* $\mathfrak{F}$ *un champ Zariskien sur les* X-*schémas, et soit* $M \in \mathfrak{F}_Y$ *un objet de la fibre en* Y.

- *Une* **Γ-*connexion d'ordre*** n *sur* M *est un isomorphisme* $p^{(n),*}_{1}M \xrightarrow{\simeq} p^{(n),*}_{2}M$ *dans* $\mathfrak{F}_{D^{n}_{Y/X,\gamma_0}}$ *se réduisant à l'identité par changement de base selon* $Y \hookrightarrow D^{n}_{Y/X,\gamma_0}$.
- *Une* ***pseudo-stratification à puissances divisées*** *sur* M *est un système de* n-*connexions à puissances divisées compatibles à la réduction d'ordre.*
- *Une* Γ-*connexion d'ordre* n *est* ***intégrable*** *si elle respecte la condition de transitivité pour les* $D^{n}_{Y/X,\gamma_0}(2)$. *Une* **Γ-*stratification*** *est une pseudo-stratification à puissances divisées dont toutes les composantes sont intégrables.*
- *Si* Y *est de torsion, une* ***hyper-Γ-stratification*** *est une* Γ-*connection intégrable d'ordre infini, c'est-à-dire un isomorphisme* $p^{(\infty),*}_{1}M \xrightarrow{\simeq} p^{(\infty),*}_{2}M$ *dans* $\mathfrak{F}_{D^{\infty}_{Y/X,\gamma_0}}$ *se réduisant à l'identité modulo l'idéal d'augmentation de* $\mathscr{D}^{\infty}_{Y/X,\gamma_0}$ *et respectant la condition de cocycle.*

Définition 66 (Opérateurs différentiels à puissances divisées). *Soient* M *et* N *deux objets de* $\mathfrak{F}_Y$. *Un* ***opérateur Γ-différentiel d'ordre*** $\leq n$ *de* M *dans* N *est un morphisme* $p^{(n)}_{1,*}p^{(n),*}_{2}M \to N$.

Un opérateur hyper-Γ*-différentiel de* M *dans* N *est un morphisme* $p^{(\infty)}_{1,*}p^{(\infty),*}_{2}M \to N$.

Remarque 67. Soit $\iota \colon X \to \overline{X}$ une S-immersion de S-schémas. On peut plus généralement définir une ι-hyper-Γ-stratification sur un objet M de la fibre en $\mathscr{D}^{\infty}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$ comme un isomorphisme $p^{*}_{1}M \xrightarrow{\simeq} p_2 p^{*}M$, où $p_i \colon \mathscr{D}^{\infty}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X} \times_S \overline{X}) \to \mathscr{D}^{\infty}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$. Cependant, comme observé dans l'étude du site infinitésimal, de tels objets ne pourront apparaître géométriquement que pour des schémas de torsion. Dans le cas général, il faudra remplacer $\mathscr{D}^{\infty}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$ par le pro-objet $\mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$ (qui est bien quasi-Γ-nilpotent).

Un objet ι-quasi-Γ-stratifié sur X est alors un système projectif $(M^{n})_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets $M^{n} \in \mathfrak{F}_{D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})}$ tel que chacun soit le changement de base des suivants le long des inclusions d'ordre (*i.e.* $M^{n} \to M^{n+1}$ est le relèvement cartésien de $D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \hookrightarrow D^{(n+1)!,n+1}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$ associé à M^{n+1}), muni un système d'isomorphismes $p^{(n!,n),*}_{1}M^{n} \xrightarrow{\simeq} p^{(n!,n)}_{2}M^{n}$ où $p_i \colon D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X} \times_S \overline{X}) \to D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$.

3.1.2. Le site cristallin

Définition 68 (Site cristallin). *Le* ***site cristallin de*** X ***relativement à*** $(S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ *est la catégorie dont*

- *les objets sont les triades* $(Y^{\circ} \to X, Y^{\circ} \hookrightarrow Y, \gamma)$ *d'un* X-*schéma* $Y^{\circ} \to X$, *d'une* S-*immersion fermée de* Y° *dans un* S-*schéma* Y, *et d'une* Γ-*structure* γ *sur l'idéal* $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_Y$ *de* Y° *compatible à* γ_0 *et rendant* $\mathscr{I}$ *quasi-*Γ*-nilpotent,*

— *les flèches* $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma) \to (Z^\circ \hookrightarrow Z, \delta)$ *sont les paires* (φ°, φ) *d'un* X*-morphisme* $\varphi^\circ \colon Y^\circ \to Z^\circ$ *et d'un* S-Γ*-morphisme* $\varphi \colon Y \to Z$ *faisant commuter le carré*

$$\begin{tikzcd} Y^\circ \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi^\circ"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ Z^\circ \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}, \tag{15}$$

munie de la topologie engendrée par la prétopologie dans laquelle une famille $(\varphi_i^\circ, \varphi_i)_{i\in I}$ *est couvrante si et seulement si les familles* $(\varphi_i^\circ)_{i\in I}$ *et* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *sont Zariski-couvrantes sur leurs cibles respectives.*

On le note $\mathfrak{Cris}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$*. Ses objets sont appelés des* ***épaississements à puissances divisées****.*

On définit aussi le petit site cristallin comme le sous-site plein sur les Γ-épaississements d'ouverts Zariski de X.

Exemple 69. Si les puissances divisées γ_0 s'étendent à X alors $(X = X, 0, 0)$ est un épaississement à puissances divisées. Afin de s'assurer que le site cristallin est non-vide, cette hypothèse sera toujours faite dans la suite.

Remarque 70. Si p est nilpotent sur S tous les Γ-idéaux sont automatiquement quasi-Γ-nilpotents. Si S est de caractéristique 0, la quasi-Γ-nilpotence est nécessairement une condition de Γ-nilpotence, qui revient à la nilpotence : on retrouve bien le site infinitésimal.

Définition 71 (Site hyper-Γ-stratifiant)**.** *Fixons un* S*-schéma* $\overline{X}$ *et un* S*-morphisme* $\iota \colon X \to \overline{X}$*. Le site* ***ι-hyper-Γ-stratifiant*** *de* X *relativement à* $(S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ *est le sous-site plein de* $\mathfrak{Cris}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ *sur les épaississements à puissances divisées* $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ *tels qu'il existe un* S*-morphisme* $\bar\iota \colon Y \to \overline{X}$ *rendant le carré*

$$\begin{tikzcd} Y^\circ \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\bar\iota"] \\ X \arrow[r, "\iota"'] & \overline{X} \end{tikzcd} \tag{16}$$

commutatif. On le note $\iota - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$*.*

Propostion 72. *L'inclusion de sites* $\mathrm{id}_X - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0) \to \mathrm{id}_X - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, 0, 0)$ *est un isomorphisme.*

Construction 73 (Faisceau structural). On a une description des faisceaux sur le site cristallin ou hyper-Γ-stratifiant similaire à celle donnée pour les sites infinitésimal et stratifiant. En particulier, on peut définir un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{cris}}$ appliquant un Γ-épaississement $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ sur $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ et un faisceau idéal quasicohérent $\mathscr{I}_{X/S}$ obtenu en recollant les faisceaux $\ker(\mathscr{O}_Y \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{Y^\circ})$, qui est canoniquement muni d'une Γ-structure $\gamma_{X/S}$.

Construction 74 (Cristaux). On a également une notion de **cristal** sur le site cristallin (ou sur le site ι-hyper-Γ-stratifiant). Si ι est une immersion, on a aussi une équivalence de catégories entre les cristaux et les objets ι-quasi-Γ-stratifiés. Si les schémas considérés sont de torsion, on a même une équivalence avec les objets munis d'une ι-hyper-Γ-stratification.

Définition 75 (Topos cristallin). *Le topos cristallin (resp. ι-hyper-Γ-stratifiant) de X relativement à $(S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ est le topos annelé à puissances divisées*

$$(X/S)_{\text{cris}} = \left(\mathfrak{Faisc}(\mathfrak{Cris}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)), \mathscr{O}_{X/S,\text{cris}}, \mathscr{I}_{X/S}, \gamma_{X/S}\right) \tag{17}$$

(resp. $(X/S)_{\iota-\text{strat}} = (\mathfrak{Faisc}(\iota - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)), \mathscr{O}_{X/S,\text{strat}}, \mathscr{I}_{X/S}, \gamma_{X/S}))$.

Propostion 76 ([Ber74, Proposition III.2.1.10]). *Le topos cristallin $(X/S)_{\text{cris}}$ a assez de points, une famille conservative de points étant donnée par la collection des points des différents objets de $\mathfrak{Cris}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$.*

3.2. Cohomologie cristalline

3.2.1. Propriétés de fonctorialité

Soit $f\colon X' \to X$ un morphisme de S-schémas.

Définition 77 (Morphisme de Γ-épaississements). *Un **morphisme de Γ-épaississements** $(X' \leftarrow Y^{\circ\prime} \hookrightarrow Y', \gamma') \to (X \leftarrow Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ consiste en un S-morphisme $g\colon Y' \to Y$ tel que $f|_{Y^{\circ\prime}}$ se factorise par Y°, le carré*

$$\begin{tikzcd} Y^{\circ\prime} \arrow[r, "f|_{Y^{\circ\prime}}"] \arrow[d, hook] & Y^\circ \arrow[d, hook] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{18}$$

est commutatif, et g est un Γ-morphisme.

On note $\mathrm{hom}_\Gamma(Y', Y)$ l'ensemble des morphismes de Γ-épaississements.

Propostion 78 ([Ber74, Théorème III.2.2.3, Corollaire III.2.2.5]). *Il existe un unique morphisme géométrique de topoi $f_{\text{cris}} = (f^\diamond \dashv f_\diamond)\colon (X'/S)_{\text{cris}} \to (X/S)_{\text{cris}}$ tel que l'image par $g^\diamond$ d'un faisceau représentable par $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ soit le faisceau $(Y^{\circ\prime} \hookrightarrow Y', \gamma') \mapsto \mathrm{hom}_\Gamma(Y', Y)$. Ce morphisme géométrique admet en outre une structure de morphisme de topoï à puissances divisées.*

Démonstration. Notons tout d'abord que, par adjonction, le foncteur $f_\diamond$ est entièrement déterminé par

$$f_\diamond\mathscr{F}(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma) = \mathrm{hom}_{(X/S)_{\text{cris}}}\big((Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma), f_\diamond\mathscr{F}\big) = \mathrm{hom}_{(X'/S)_{\text{cris}}}\big(f^\diamond(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma), \mathscr{F}\big). \tag{19}$$

Par [Ber74, Lemme III.2.2.2], ce préfaisceau est bien un faisceau, ce qui veut dire que l'on définit bien un morphisme continu de sites $f^\diamond|_{\mathfrak{Cris}(X/S)}\colon \mathfrak{Cris}(X/S) \to (X'/S)_{\text{cris}}$, où le topos cristallin de X' sur S est vu comme un site en le munissant de sa toplogie canonique (puisque par le théorème de Giraud tout faisceau canonique sur $(X'/S)_{\mathrm{cris}}$ est bien représentable par un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Cris}(X'/S)$ comme au-dessus). Par [SGA4, Proposition III.1.2.iv)], ce morphisme de ce sites s'étend bien à un foncteur $f^{\diamond}$ comme voulu. Pour que $f^{\diamond}$ définisse un morphisme géométrique de topoï, il reste simplement à montrer qu'il commute aux limites projectives finies. $\square$

Propostion 79 ([Ber74, Proposition III.2.2.6]). *Si* $g\colon X'' \to X'$ *est un autre S-morphisme, il existe un isomorphisme canonique de morphismes de topoï annelés* $(f \circ g)_{\mathrm{cris}} \overset{\simeq}{\Rightarrow} f_{\mathrm{cris}} \circ g_{\mathrm{cris}}$.

Ainsi $(-/S)_{\mathrm{cris}}$ définit bien un pseudo-foncteur de la catégorie des S-schémas dans la 2-catégorie des topoï à puissances divisées.

Nous allons appliquer ces résultats de fonctorialité à l'étude de la réduction de S-schémas modulo l'idéal de compatibilité. Notons $i\colon X_0 \to X$ le S-morphisme d'inclusion de la réduction modulo $\mathscr{I}_0$ de X.

Lemme 80 ([Ber74, Corollaire III.2.3.3]). *Il existe un isomorphisme canonique* $i_{\diamond}\mathscr{O}_{X_0/S,\mathrm{cris}} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{O}_{X/S,\mathrm{cris}}$.

Plus généralement ([Ber74, Corollaire III.2.3.2])*, on a pour tout faisceau* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathfrak{Cris}(X_0/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ *un isomorphisme* $(i_{\diamond}\mathscr{F})_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{F}_{(Y^\circ \times_X X_0 \hookrightarrow Y,\gamma)}$.

Démonstration. Pour obtenir l'égalité des faisceaux structuraux cristallins, on considère l'idéal $\mathscr{K}_{X/S}$ de $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{cris}}$ obtenu en recollant les $(\mathscr{K}_{X/S})_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)} = \mathscr{I}_0 \cdot (\mathscr{O}_{X/S})_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)} + (\mathscr{I}_{X/S})_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ un isomorphisme $i_{\diamond}\mathscr{I}^{[n]}_{X_0/S} \simeq \mathscr{K}^{[n]}_{X/S}$. $\square$

Théorème 81 ([Ber74, Théorème III.2.3.4]). *Soit* $\mathscr{A}$ *un anneau de* $(X_0/S)_{\mathrm{cris}}$. *Le foncteur* $i_{\diamond}$ *est exact sur la catégorie des* $\mathscr{A}$*-modules. Pour tout* $\mathscr{M}^\bullet \in \mathbb{D}^{\geq 0}(\mathscr{A} - \mathfrak{Mod})$ *il existe un isomorphisme canonique* $\mathbb{R}\Gamma(X/S, i_{\diamond}\mathscr{M}^\bullet) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\Gamma(X_0/S, \mathscr{M}^\bullet)$ *dans la catégorie dérivée des* $\Gamma(X_0/S, \mathscr{A})$*-modules.*

Ainsi la cohomologie cristalline de X_0 relativement à S ne dépend pas du choix de plongement $X_0 \hookrightarrow X$.

Donnons maintenant une méthode de calcul explicite de la cohomologie cristalline en termes d'un complexe sur le site Zariskien. Le site cristallin, contrairement au site Zariskien, n'admet généralement pas d'objet final pour calculer les sections globales de faisceaux ; cependant l'objet final du topos cristallin peut être recouvert par un faisceau ind-représentable.

Construction 82 (Comparaison avec le topos Zariskien). Le morphisme de sites $\mathfrak{Cris}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0) \to \mathfrak{Sch}_{/X,\mathrm{Zar}}$, $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma) \mapsto Y^\circ$ est continu et détermine donc le foncteur d'image inverse dans un morphisme géométrique de topoï $\mathscr{comp} = (\mathscr{comp}^* \dashv \mathscr{comp}_*)\colon (X/S)_{\mathrm{cris}} \to X_{\mathrm{Zar}}$, c'est-à-dire que pour tout faisceau Zariskien $\mathscr{F}$ sur X et tout objet $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ de $\mathfrak{Cris}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ on a $\mathscr{comp}^*\mathscr{F}(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma) = \mathscr{F}(Y^\circ)$.

Pour tout X-schéma $f\colon X' \to X$ auquel s'étendent les puissances divisées γ_0, que l'on voit comme un faisceau Zariskien sur X, on a un isomorphisme de topoï $(X'/S)_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\simeq}$

$(X/S)_{\mathrm{cris},/\mathscr{comp}^*X'}$, et le foncteur $f_\diamond$ s'identifie à la projection canonique $(X/S)_{\mathrm{cris},/\mathscr{comp}^*X'} \to (X/S)_{\mathrm{cris}}$.

Le morphisme $\mathscr{comp}$ est en fait un morphisme géométrique essentiel, c'est-à-dire que $\mathscr{comp}^*$ admet un adjoint à gauche $\mathscr{comp}_!$. Celui-ci s'avère en outre commuter aux limites finies, et définit donc donc un morphisme géométrique $\mathscr{incl} = (\mathscr{comp}_! \dashv \mathscr{comp}^*) \colon X_{\mathrm{Zar}} \hookrightarrow (X/S)_{\mathrm{cris}}$, qui est une section de $\mathscr{comp}$.

Lemme 83 ([Ber74, Lemme V.1.2.1],[BO, 5.28])**.** *Supposons que $\iota \colon X \hookrightarrow \overline{X}$ est une immersion fermée. Le morphisme $\iota^\diamond(\overline{X} = \overline{X}, 0) \to *$ est un épimorphisme (nécessairement effectif puisque dans un topos, et donc un recouvrement pour la topologie canonique). En outre, si $\overline{X}/S$ est lisse, le faisceau $\iota^\diamond(\overline{X} = \overline{X}, 0)$ est représentable par le système $(X \hookrightarrow D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}), [\cdot])_n$.*

Définition 84 (Complexe d'Alexander–Čech)**.** *Soit $\iota \colon X \to \overline{X}$ un S-morphisme. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur $\iota - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$. On définit son* ***complexe d'Alexander–Čech*** *$\check{C}A^\bullet(\mathscr{F})$ de k-ième terme $\check{C}A^k(\mathscr{F}) = \varprojlim_n \mathscr{F}_{D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}^{k+1}_{/S})}$, que l'on voit comme un objet cosimplicial dans les faisceaux Zariskiens sur X puisque chaque $D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}^{k+1}_{/S})$ est un épaississement de X et a donc le même espace topologique sous-jacent.*

Remarque 85. L'objet cosimplicial $\check{C}A^\bullet(\mathscr{F})$ correspond à $\mathscr{F}$ « évalué » sur le nerf de la catégorie en schémas formels Γ-adique $(D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X} \times_S \overline{X}))_n \rightrightarrows (D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}))_n$.

En particulier, si X est de torsion, on peut plus simplement évaluer $\mathscr{F}$ sur les complétions Γ-adiques des voisinages, obtenant $\check{C}A^\bullet(\mathscr{F}) = \mathscr{F}_{D^{\infty}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}^{\bullet+1}_{/S})}$.

Théorème 86 ([Ber74, Théorème V.1.2.5, Appendice])**.** *Soit $\mathscr{A}$ un $\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}}$-algèbre, et $\mathscr{M}$ une $\mathscr{A}$-algèbre. Si $\mathscr{M}$ vérifie que pour tout Γ-épaississement $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ et tout ouvert affine $V \subset Y$ on a $H^{\geq 1}(V, \mathscr{M}_{(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)}) = 0$ et que pour tout morphisme $(\phi^\circ, \phi) \colon (Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma) \to (Z^\circ \hookrightarrow Z, \delta)$ où Y et Z sont affines et $\phi \colon Y \to Z$ est une immersion fermée le morphisme $\mathscr{M}(Z^\circ \hookrightarrow Z, \delta) \to \mathscr{M}(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ est surjectif, il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{comp}_*\mathscr{M} \xrightarrow{\simeq} \check{C}A^\bullet(\mathscr{M}) \tag{20}$$

dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(\mathscr{comp}_*\mathscr{A} - \mathfrak{Mod})$, induisant par application du foncteur $\mathbb{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}})$ un quasi-isomorphisme de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(X/S, \mathscr{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}, \check{C}A^\bullet(\mathscr{M})). \tag{21}$$

3.2.2. Comparaison avec la cohomologie de de Rham

Construction 87 (Linéarisation d'opérateurs différentiels). Nous allons associer à tout opérateur Γ-différentiel entre $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-modules un opérateur linéaire. Pour cela, nous voyons les opérateurs Γ-différentiels comme les flèches d'une catégorie dont les objets sont les $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-modules, et nous allons construire l'opération de linéarisation comme un foncteur $\mathscr{L}$ de cette catégorie dans celle des cristaux en $\mathscr{O}_X$-modules (sur $\iota - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$) et morphismes $\mathscr{O}_{X/S}$-linéaires entre eux.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module. Par [Ber74, Lemme IV.3.1.2.i), Appendice], le système projectif $\left(\mathscr{D}^{n!,n}_{\overline{X}/S} \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{F}\right)_n$ est muni d'une ι-quasi-Γ-stratification, ce qui implique que pour tout

$(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ admettant une rétraction $h\colon Y \to \overline{X}$, le pro-objet $\varprojlim_n h^*(\mathscr{D}^{n!,n}_{\overline{X}/S} \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{F})$ est essentiellement indépendant de h.

On sait donc associer à tout objet $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma)$ un $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{L}(\mathscr{F})_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)}$, ce qui se recolle bien en un cristal en $\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}}$-modules $\mathscr{L}(\mathscr{F})$. En outre, toujours par [Ber74, Lemme IV.3.1.2], on peut associer de manière fonctorielle une famille d'homorphismes entre les $\mathscr{L}(-)_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)}$ qui sont horizontaux pour les ι-quasi-Γ-stratifications, et correspondent donc à des homomorphismes $\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}}$-linéaires.

Construction 88 (Filtration du complexe de de Rham linéarisé). À partir des augmentations $\mathscr{D}^{n!,n}_{\overline{X}/S,\gamma_0} \to \mathscr{O}_{\overline{X}}$, on peut construire, en suivant [Ber74, V.2.1.4], un morphisme surjectif $\mathscr{L}(\mathscr{O}_{\overline{X}}) \to \mathit{incl}_*\mathscr{O}_X$. On note $\mathscr{K}$ son noyau ; pour tout $(Y^\circ \hookrightarrow Y, \gamma) \in \iota - \mathfrak{h}\Gamma - \mathfrak{Strat}(X/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ on a $\mathscr{K}_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)} \simeq \mathscr{I}_{X/S,(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)} + \varprojlim_n h^*\mathscr{H}_n$ où $h\colon Y \to \overline{X}$ est une rétraction et $\mathscr{H}_n$ l'idéal d'augmentation de $\mathscr{D}^{n!,n}_{\overline{X}/S,\gamma_0}$.

On peut donner, selon [BO, (6.13.1)], une autre interprétation de l'idéal $\mathscr{K}$. Rappelons que le système des $(D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}), [\cdot])$ représente, lorsque $\overline{X}/S$ est lisse, le faisceau $i^\diamond(\overline{X} = \overline{X}, 0)$. Notons $p_{i^\diamond\overline{X}}\colon (X/S)_{\iota-\mathrm{strat},/i^\diamond\overline{X}} \to (X/S)_{\iota-\mathrm{strat}}$ la projection canonique du topos tranché. Alors on a $\mathscr{K} = p_{i^\diamond\overline{X},*}(\mathscr{I}_{X/S,/i^\diamond\overline{X}})$.

En notant d_{dR} la différentielle du complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{\overline{X}/S}$, on a bien $\mathscr{L}(d_{dR})\big(\mathscr{K}^{[\ell]}\mathscr{L}(\Omega^k_{\overline{X}/S})\big) \subset \mathscr{K}^{[\ell-1]}\mathscr{L}(\Omega^{k+1}_{\overline{X}/S})$. On peut donc définir une filtration $F^\star\mathscr{L}(\Omega^\bullet_{\overline{X}/S}) \subset \mathscr{L}(\Omega^\bullet_{\overline{X}/S})$ de termes $F^n\mathscr{L}(\Omega^k_{\overline{X}/S}) \coloneqq \mathscr{K}^{[n-k]}\mathscr{L}(\Omega^k_{\overline{X}/S})$.

Exemple 89 (Expression dans les coordonnées locales, [BO, Lemma 6.11 et après (6.13.1)]). Supposons ici que les schémas considérés sont de torsion, de sorte que l'on puisse remplacer les systèmes de voisinages d'ordres $(n!, n)$ par les voisinages d'ordre infini.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des coordonnées locales pour $\overline{X}$, donnant les coordonnées $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1 \eqqcolon \xi_i$ dans $\mathscr{D}^\infty_{\overline{X}/S,\gamma_0}$, alors $\mathscr{K}_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)}$ est l'idéal de $\mathscr{L}(\mathscr{O}_X)_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)} \simeq \mathscr{O}_Y\langle \xi_1, \dots, x_n\rangle$ engendré par les ξ_i et l'idéal $(\mathscr{I}_{X/S})_{(Y^\circ \hookrightarrow Y,\gamma)}$ de $X \cap Y$ dans Y.

En outre, le morphisme $\mathscr{L}(d_{dR})\colon \mathscr{D}^\infty_{\overline{X}/S} \otimes \Omega^k_{\overline{X}/S} \to \mathscr{D}^\infty_{\overline{X}/S} \otimes \Omega^{k+1}_{\overline{X}/S}$ applique une section $a\xi_1^{[k_1]} \cdots \xi_n^{[k_n]} \otimes \omega$ sur

$$a \sum_{i=1}^{n} \xi_1^{[k_1]} \cdot \xi_i^{[k_i-1]} \cdot \xi_n^{[k_n]} \otimes d_{dR}x_i \wedge \omega + a\xi_1^{[k_1]} \cdots \xi_n^{[k_n]} \otimes d_{dR}\omega. \tag{22}$$

Lemme 90 (Lemme de Poincaré cristallin, [Ber74, Théorème V.2.1.5]). *Si $\overline{X}$ est lisse sur S, pour tout $\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}}$-module $\mathscr{M}$ il existe un isomorphisme*

$$\mathscr{I}^{[n]}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}} \cdot \mathscr{M} \xrightarrow{\simeq} F^n\left(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}}} \mathscr{L}(\Omega^\bullet_{\overline{X}/S})\right) \tag{23}$$

dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}} - \mathfrak{Mod})$.

Lemme 91 ([Ber74, Proposition V.2.2.2.i)]). *Supposons que ι est une immersion. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module. Soit $\mathscr{J}_n$ le Γ-idéal de X dans $D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$. Il existe un isomorphisme $\check{C}A(\mathscr{K}^{[\ell]}\mathscr{L}(\mathscr{M})) \simeq \varprojlim_n \mathscr{J}_n^{[\ell]}(D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M})$ dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{Mod})$.*

Corollaire 92 ([Ber74, Corollaire V.2.2.4]). *Soit $\mathscr{M}^\bullet$ un $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module gradué muni d'une famille d'opérateurs ι-quasi-Γ-différentiels $d^i \colon \mathscr{M}^i \to \mathscr{M}^{i+1}$ telle que $(\mathscr{L}(\mathscr{M}^\bullet), \mathscr{L}(d^\bullet))$ soit un complexe de cristaux. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{R}\mathscr{comp}_*(\mathscr{L}(\mathscr{M}^\bullet)) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_n \mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M}^\bullet \tag{24}$$

dans $\mathbb{D}^{\geq 0}((X \to S)^{-1}\mathscr{O}_S - \mathfrak{Mod})$, induisant dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(\Gamma(S, \mathscr{O}_S) - \mathfrak{Mod})$ un isomorphisme

$$\mathbb{R}\Gamma\left((X/S)_{\iota-\mathrm{strat}}, \mathscr{L}(\mathscr{M}^\bullet)\right) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\Gamma\big(\overline{X}, \varprojlim_n \mathscr{M}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})\big). \tag{25}$$

Soit $(\mathscr{M}^n)_n$ un « $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module » muni d'une ι-quasi-Γ-stratification. On note encore $\mathscr{J}_n$ l'idéal de X dans $D^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X})$. On peut alors définir une filtration sur le complexe $\varprojlim_n \mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M}^n \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \Omega^\bullet_{\overline{X}/S}$ par

$$F^\ell\left(\varprojlim_n \mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M}^n \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \Omega^k_{\overline{X}/S}\right) = \varprojlim_n \mathscr{J}_n^{\ell-k}\left(\mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M}^n \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \Omega^k_{\overline{X}/S}\right). \tag{26}$$

Théorème 93 ([Ber74, Théorème V.2.3.2]). *Soit $\diamondsuit(\mathscr{M})$ le cristal en $\mathscr{O}_{X/S,\iota-\mathrm{strat}}$-modules lui correspondant. Il existe alors un morphisme canonique*

$$\mathbb{R}\mathscr{comp}_*\left(\mathscr{I}^{[\ell]}_{X/S} \cdot \diamondsuit(\mathscr{M})\right) \to F^\ell\left(\varprojlim_n \mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M}^n \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \Omega^\bullet_{\overline{X}/S}\right) \tag{27}$$

dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(((X \to S)^{-1}\mathscr{O}_S) - \mathfrak{Mod})$ induisant dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(\Gamma(S, \mathscr{O}_S) - \mathfrak{Mod})$ un isomorphisme

$$\mathbb{R}\Gamma\left((X/S)_{\iota-\mathrm{strat}}, \mathscr{I}^{[\ell]}_{X/S} \cdot \diamondsuit(\mathscr{M})\right) \to \mathbb{R}\Gamma\left(\overline{X}_{\mathrm{Zar}}, F^\ell\left(\varprojlim_n \mathscr{D}^{n!,n}_{\gamma_0}(X \hookrightarrow \overline{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \mathscr{M}^n \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}}} \Omega^\bullet_{\overline{X}/S}\right)\right). \tag{28}$$

Si $\overline{X}$ est lisse sur S, ces morphismes sont des isomorphismes.

Corollaire 94 ([Ber74, Corollaire V.2.3.7]). *Plaçons-nous dans le cas $\iota = \mathrm{id}_X$. Il existe dans $\mathbb{D}^{\geq 0}(((X \to S)^{-1}\mathscr{O}_S) - \mathfrak{Mod})$ un morphisme canonique $\mathbb{R}\mathscr{comp}_*(\mathscr{I}^{[n]}_{X/S}) \to \Omega^{\bullet \geq n}_{X/S}$, qui est un isomorphisme dès que X est lisse sur S. L'image de $\mathbb{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}, \mathscr{I}^{[n]}_{X/S})$ dans $\mathbb{R}\Gamma((X/S)_{\mathrm{strat}}, \mathscr{O}_{X/S})$ correspond par cet isomorphisme au n-ième cran de la filtration de Hodge sur $\mathbb{R}\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}, \Omega^\bullet_{X/S})$.*

Pour finir, nous donnons une interprétation cristalline de la connexion de Gauß–Manin, en termes des morphismes de fonctorialité.

Théorème 95 ([Ber74, Proposition V.3.6.1, Corollaire V.3.6.2]). *Soit $f \colon X \to Y$ un S-morphisme lisse, quasi-compact et quasi-séparé avec Y un S-schéma quasicompact. Notons $\mathfrak{D}_Y$ la catégorie fibrée sur les Y-schémas dont la fibre en $T \to Y$ est la catégorie dérivée $\mathbb{D}^{<0}(\mathscr{O}_T - \mathfrak{Mod})$. Alors pour tout $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{cris}}$-module quasi-cohérent plat $\mathscr{M}$, l'image $\mathbb{R}f_\diamond(\mathscr{M})$ est un cristal en objets* *de $\mathfrak{D}_Y$, c'est-à-dire que pour tout morphisme* $c\colon (T^\circ \hookrightarrow T, \gamma) \to (Z^\circ \hookrightarrow Z, \delta)$ *dans* $\mathfrak{Cris}(Y/S, \mathscr{I}_0, \gamma_0)$ *le morphisme* $\mathbb{L}c^\diamond\big(\mathbb{R}f_\diamond(\mathscr{M})_{Z^\circ}\big) \to \mathbb{R}f_\diamond(\mathscr{M})_{T^\circ}$ *est un isomorphisme dans* $\mathbb{D}^{<0}(\mathscr{O}_T - \mathfrak{Mod})$.

En outre, sa valeur en $(Y = Y, 0)$ *est le complexe* $\mathbb{R}f_*(\mathscr{M}_{(X=X,0)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^\bullet_{X/Y})$ *muni de sa connexion intégrable canonique.*

On peut noter que la catégorie fibrée $\mathfrak{D}_Y$ n'est en général pas un champ Zariskien, mais la définition de cristal, bien que donnée pour des champs, a du sens pour des catégories fibrées quelconques.

Propostion 96 ([Ber74, Proposition V.3.6.4])**.** *Dans les hypothèses du théorème précédent, supposons en outre que* Y *est lisse sur* S. *Soit* $\mathscr{M}$ *un cristal en* $\mathscr{O}_{X/S,\mathrm{cris}}$*-modules quasicohérents, correspondant à un* $\mathscr{O}_X$*-module quasicohérent plat* $\mathscr{M}_0$ *muni d'une connexion intégrable et quasinilpotente. La connexion induite sur les* $\mathscr{O}_Y$*-modules* $\mathbb{R}^i f_*(\mathscr{M}_0 \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^\bullet_{X/Y})$ *est la connexion de Gauß-Manin.*

A. Formulation opéradique des structures à puissances divisées

On fixe un corps de base k, de caractéristique quelconque. Le terme opérade fera toujours ici référence aux opérades symétriques (monochromatiques) dans la catégorie monoïdale symétrique des k-espaces vectoriels avec le produit tensoriel.

Rappelons que pour une suite symétrique (aussi appelée $\mathbb{S}$-module, c'est-à-dire un foncteur $\mathbb{S} \to k - \mathfrak{Mod}$ où $\mathbb{S}$ est le groupoïde avec ensemble d'objets $\mathbb{N}$ et $\hom(n, n) = \mathbb{S}_n$) $\mathfrak{O} = (\mathfrak{O}(n))_{n\in\mathbb{N}}$, son foncteur de Schur est l'endofoncteur $\Sigma_{\mathfrak{O}}$ de $k - \mathfrak{Mod}$ appliquant V sur $\bigoplus_{n\geq 0}(\mathfrak{O}(n) \otimes V^{\otimes n})_{\mathbb{S}_n}$. On peut également définir un endofoncteur en utilisant les invariants au lieu des coinvariants.

Définition 97. *Le* ***foncteur de Schur à symétries divisées*** *d'une suite symétrique* $\mathfrak{O}$ *est l'endofoncteur* $\Gamma_{\mathfrak{O}}$ *de* $k - \mathfrak{Mod}$ *appliquant* V *sur*

$$\bigoplus_{n\geq 0} \left(\mathfrak{O}(n) \otimes_k V^{\otimes n}\right)^{\mathbb{S}_n}, \tag{29}$$

avec l'action évidente sur les morphismes.

En notant $k - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}_n}$ la catégorie des suites symétriques et $\mathfrak{EndoFonc}(\mathfrak{C})$ la catégorie des endofoncteurs d'une catégorie $\mathfrak{C}$, on obtient de cette façon deux foncteurs $\Sigma\colon k - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}_n} \to \mathfrak{EndoFonc}(k - \mathfrak{Mod})$ et $\Gamma\colon k - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}_n} \to \mathfrak{EndoFonc}(k - \mathfrak{Mod})$, qui sont reliés par une transformation naturelle $\mathrm{tr}\colon \Sigma \Rightarrow \Gamma$ (qui est un isomorphisme naturelle si k est de caractéristique nulle).

Rappelons également que la catégorie des suites symétriques est munie de deux structures monoïdales, le produit tensoriel

$$(\mathfrak{O} \otimes \mathfrak{P})(n) = \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}^{\mathbb{S}_n}_{\mathbb{S}_i\times\mathbb{S}_j}(\mathfrak{O}(i) \otimes_k \mathbb{P}(j)) \tag{30}$$

qui est symétrique et a pour unité la suite symétrique avec $\Bbbk$ concentré en arité 0, et le produit de composition

$$\mathfrak{O} \circ \mathfrak{P} = \bigoplus_{r \geq 0} (\mathfrak{O}(r) \otimes \mathfrak{P}^{\otimes r})_{\mathbb{S}_r} \tag{31}$$

qui n'est pas symétrique et a pour unité la suite symétrique avec $\Bbbk$ concentré en arité 1. De même la catégorie des endofoncteurs de $\Bbbk - \mathfrak{Mod}$ admet deux structures monoïdales, le produit tensoriel (calculé terme à terme dans $\Bbbk - \mathfrak{Mod}$) qui est symétrique, et le produit de composition (qui n'est pas symétrique). Le foncteur Σ définit un foncteur monoïdal symétrique $(\Bbbk - \mathfrak{Mod}, \otimes) \to (\mathfrak{EndoFonc}(\Bbbk - \mathfrak{Mod}), \otimes)$ et un foncteur monoïdal $(\Bbbk - \mathfrak{Mod}, \circ) \to (\mathfrak{EndoFonc}(\Bbbk - \mathfrak{Mod}), \circ)$. Le foncteur Γ est également symétrique monoïdal $(\Bbbk - \mathfrak{Mod}, \otimes) \to (\mathfrak{EndoFonc}(\Bbbk - \mathfrak{Mod}), \otimes)$.

Définition 98. *Le produit de composition à symétries divisées est le bifoncteur* $\widetilde{\circ}\colon \Bbbk - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}} \times \Bbbk - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}} \to \Bbbk - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}}$ *défini par*

$$\mathfrak{O} \widetilde{\circ} \mathfrak{P} = \bigoplus_{r \geq 0} (\mathfrak{O}(r) \otimes \mathfrak{P}^{\otimes r})^{\mathbb{S}_r}. \tag{32}$$

Il définit une structure monoïdale (non symétrique) sur $\Bbbk - \mathfrak{Mod}^{\mathbb{S}}$*, dont l'unité est la suite symétrique avec* $\Bbbk$ *concentré en arité* 1*.*

Lemme 99 ([Fre99, Proposition 1.1.9])**.** *Le foncteur* Γ *induit un foncteur monoïdal* $(\Bbbk - \mathfrak{Mod}, \widetilde{\circ}) \to (\mathfrak{EndoFonc}(\Bbbk - \mathfrak{Mod}), \circ)$*.*

Rappelons enfin qu'une opérade est un monoïde dans les suites symétriques relativement au produit de composition. C'est donc de façon équivalente une suite symétrique dont le foncteur de Schur est muni d'une structure de monade, ce qui permet de définir aisément une algèbre sur une opérade comme une algèbre sur sa monade de Schur.

Théorème 100 ([Fre99, Proposition 1.1.15])**.** *Soient* $\mathfrak{O}$ *et* $\mathfrak{P}$ *deux suites symétriques. On peut également définir un morphisme dit « trace »* $\mathrm{tr}_{\mathfrak{O},\mathfrak{P}}\colon \mathfrak{O} \circ \mathfrak{P} \to \mathfrak{O} \widetilde{\circ} \mathfrak{P}$*. Si* $\mathfrak{P}$ *est connexe, c'est-à-dire* $\mathfrak{P}(0) = 0$*, alors* $\mathrm{tr}_{\mathfrak{O},\mathfrak{P}}$ *est un isomorphisme.*

Corollaire 101. *Soit* $\mathfrak{O}$ *une opérade connexe. La structure de monoïde sur* $\mathfrak{O}$ *induit une structure de monade sur le foncteur de Schur à symétries divisées* $\Gamma_{\mathfrak{O}}$*.*

Démonstration. Notons $\mu\colon \mathfrak{O} \circ \mathfrak{O} \to \mathfrak{O}$ le produit de monoïde, induisant la structure de monade de Schur $\mu_{(\Sigma)}\colon \Sigma_{\mathfrak{O}} \circ \Sigma_{\mathfrak{O}} \simeq \Sigma_{\mathfrak{O} \circ \mathfrak{O}} \xrightarrow{\Sigma_\mu} \Sigma_{\mathfrak{O}}$.

On peut de même définir la structure de monade de Schur à symétries divisées

$$\mu_{(\Gamma)}\colon \Gamma_{\mathfrak{O}} \circ \Gamma_{\mathfrak{O}} \simeq \Gamma_{\mathfrak{O} \widetilde{\circ} \mathfrak{O}} \xrightarrow[\simeq]{\Gamma_{\mathrm{tr}^{-1}_{\mathfrak{O},\mathfrak{O}}}} \Gamma_{\mathfrak{O} \circ \mathfrak{O}} \xrightarrow{\Gamma_\mu} \Gamma_{\mathfrak{O}}. \tag{33}$$

$\square$

Définition 102. *Une* ***$\mathfrak{O}$-algèbre à puissances divisées****, ou* $\Gamma\mathfrak{O}$*-algèbre, est une* $(\Gamma_{\mathfrak{O}}, \mu_{(\Gamma)})$*-algèbre.*

Remarque 103. Par le morphisme $\mathrm{tr}_{\mathfrak{O}}\colon \Sigma_{\mathfrak{O}} \to \Phi_{\mathfrak{O}}$, toute $\mathfrak{O}$-algèbre à puissances divisées $\gamma\colon \Gamma_{\mathfrak{O}}(A) \to A$ est canoniquement équipée d'une structure d'$\mathfrak{O}$-algèbre $\Sigma_{\mathfrak{O}}(A) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathfrak{O},A}} \Gamma_{\mathfrak{O}}(A) \xrightarrow{\gamma} A$.

Exemple 104.
— Soit $\mathfrak{A}^{\text{n.u.}}$ l'opérade encodant les k-algèbres associatives non unifères. Le morphisme $\mathrm{tr}_{\mathfrak{A}^{\text{n.u.}}}$ est un isomorphisme naturel : une algèbre associative à puissances divisées n'est rien de plus qu'une algèbre associative. Ce résultat est fait vrai ([Fre99, 1.2.1]) pour toute opérade qui est projective en tant que suite symétrique.
— Soit $\mathfrak{E}^{\text{n.u.}}$ l'opérade encodant les k-algèbres associatives et commutatives non unifères. Alors ([Fre99, Proposition 1.2.3]) une $\Gamma\mathfrak{E}^{\text{n.u.}}$-algèbre est bien une Γ-algèbre au sens de la sous-sous-section 2.1.1.
— Soit $\mathfrak{L}^{\text{n.u.}}$ l'opérade encodant les k-algèbres de Lie non unifères, avec k de caractéristique p. Alors ([Fre99, Theorem 1.2.5]) une $\Gamma\mathfrak{L}^{\text{n.u.}}$-algèbre est une algèbre de Lie restreinte, c'est-à-dire une algèbre de Lie munie d'un morphisme de Frobenius p-typique.
— Soit $\mathfrak{P}^{\text{n.u.}}$ l'opérade encodant les k-algèbres de Poisson, dont la suite symétrique sous-jacente est $\mathfrak{E}^{\text{n.u.}} \circ \mathfrak{L}^{\text{n.u.}}$ (la structure d'opérade faisant intervenir une loi distributive, voir [Fre99, 1.2.17]). Si k est de caractéristique 2, une $\Gamma\mathfrak{P}^{\text{n.u.}}$-algèbre consiste en un k-module A muni d'une structure de $\Gamma\mathfrak{E}^{\text{n.u.}}$-algèbre $(\cdot,\gamma)$ et d'une structure de $\Gamma\mathfrak{L}^{\text{n.u.}}$-algèbre $([,],F)$ telles que
  — $[x\cdot y, z] = x\cdot[y,z] + [x,z]\cdot y$,
  — $[\gamma_n(x), y] = \gamma_{n-1}(x)\cdot[x,y]$,
  — $F(x\cdot y) = x\cdot y\cdot[x,y]$,
  — $F(\gamma_2(x)) = 0$.

Remarque 105 (Opérades connexes et opérades réduites). À toute opérade $\mathfrak{O}$ on peut associer ([Fre99, 1.1.12]) une opérade connexe $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$ avec $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}(0) = 0$ et $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}(n) = \mathfrak{O}(n)$ si $n > 0$. On vérifie aisément que $\mathfrak{O}(0)$ est toujours muni d'une structure de $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$-algèbre, et que la donnée d'une $\mathfrak{O}$-algèbre est équivalente à celle d'une $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$-algèbre sous $\mathfrak{O}(0)$ (qui est donc aussi une $\mathfrak{O}$-algèbre par $\mathrm{id}_{\mathfrak{O}(0)}$). De même, la donnée d'une $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$-algèbre est équivalente à celle d'une $\mathfrak{O}$-algèbre augmentée sur $\mathfrak{O}(0)$.

Réciproquement, à toute opérade connexe $\mathfrak{O}$ on peut associer une opérade réduite (*i.e.* dont le k-module d'arité 0 est k) $\mathfrak{O}_+$ en posant $\mathfrak{O}_+(0) = k$ et $\mathfrak{O}_+ = \mathfrak{O}(n)$ pour $n > 0$.

Comme expliqué dans la sous-sous-section 2.1.1, nous voulons pouvoir parler de structure de puissances divisées sur un idéal quelconque d'une algèbre commutative unifère (une $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+^{\text{n.u.}}$-algèbre).

Définition 106. *Soient $\mathfrak{O}$ une opérade et A une $\mathfrak{O}$-algèbre. Rappelons qu'un A-module est un k-module M muni d'une structure associative et unifère $\Sigma_{\mathfrak{O}}(A;M) \to M$, où*

$$\Sigma_{\mathfrak{O}}(A;M) \coloneqq \left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{O}(n) \otimes \left(\bigoplus_{1\leq i\leq n} A^{\otimes i-1} \otimes M \otimes A^{\otimes n-i}\right)\right)_{\mathbb{S}_n}. \tag{34}$$

*Un **idéal** de A est un sous-A-module de A.*

Remarque 107. La partie $n = 0$ de la première somme dans l' Équation 34 donne un morphisme $\mathfrak{O}(0) \otimes M \to M$, c'est-à-dire une collection d'opérations unaires sur M indexées par $\mathfrak{O}(0)$; ceci s'inscrit en opposition de la situation pour l'action du foncteur de Schur lors de la définition d'une structure d'algèbre, où la partie $n = 0$ donne un morphisme $\mathfrak{O}(0) \otimes A^{\otimes 0} = \mathfrak{O}(0) \otimes k \to A$, c'est-à-dire que $\mathfrak{O}(0)$ indexe bien des opérations d'arité 0. Ainsi on ne peut s'attendre qu'à avoir une structure d'algèbre non-unifère sur un idéal.

Lemme 108. *Soit $\mathfrak{O}$ une opérade, d'opérade connexe associée $\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$, et soit $\lambda\colon \Sigma_{\mathfrak{O}}(A) \to A$ une $\mathfrak{O}$-algèbre. Soit $\rho\colon \Sigma_{\mathfrak{O}}(A; I) \to I$, $I \hookrightarrow A$ un idéal de A.*

Le morphisme $\Sigma_{\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}}(I) \to \Sigma_{\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}}(A) \to \Sigma_{\mathfrak{O}}(A) \to A$ se factorise par $\Sigma_{\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}}(I) \to I \hookrightarrow A$, donnant à I une structure d'$\mathfrak{O}$-algèbre non-unifère.

Démonstration. À venir. □

Définition 109. *Soit $\mathfrak{O}$ une opérade. Une $\mathfrak{O}$-algèbre avec idéal à puissances divisées est une $\mathfrak{O}$-algèbre A munie d'un idéal I et d'un relèvement de la structure d'$\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$-algèbre de I à une structure de $\Gamma\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}$-algèbre, c'est-à-dire une flèche en pointillés faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}}(I) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rrd] & \Sigma_{\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}}(A) \arrow[r] & \Sigma_{\mathfrak{O}}(A) \arrow[r] & A \\
\Gamma_{\mathfrak{O}^{\text{n.u.}}}(I) \arrow[rr, dashed] & & I \arrow[ru, hook] &
\end{tikzcd} \quad . \tag{35}$$

Références

[Ber74] Pierre Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$

[BO] Pierre Berthelot et Arthut Ogus, *Notes on crystalline cohomology*

[Fre99] Benoit Fresse, *On the homotopy of simplicial algebras over an operad*

[Gro67] *Éléments de Géométrie Algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (quatrième partie)*, §16

[Gro68] Alexander Grothendieck, « Crystals and the de Rham cohomology of schemes », *Dix Exposés sur la cohomologie des schémas*

[Stacks] *The Stacks project*, Chapitres « Divided power algebra » et « Crystalline cohomology »