Théorèmes de comparaison pour la cohomologie prismatique

David KERN

10 juillet 2019

Table des matières

1 Comparaison pour les prismes cristallins

1.1 Comparaison cristalline en caractéristique p

Lemme 1 ([BS19, Corollary 2.37]). *Soient* (A, δ) *un* δ*-anneau sans* p*-torsion et* I *un idéal régulier* $\mod (p)$*, donc engendré par une suite* $f_1, \cdots, f_r$ *régulière dans* $A/(p)$*. Alors l'enveloppe à puissances divisées* $\mathscr{D}^\infty(A, I)$ *coïncide avec le* δ*-anneau de présentation finie* (*sur* (A, δ)) $A\left\{\frac{\phi_{(\delta)}(f_i)}{p}\right\}_{1\leq i\leq r}$.

Démonstration. En procédant par récurrence on peut se réduire au cas où $r = 1$. On a $A\left\{\frac{\phi_{(\delta)}(f_1)}{p}\right\} = A \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}} \mathbb{Z}_{(p)}\left\{x, \frac{\phi_{(\delta)}(x)}{p}\right\}$, et comme les enveloppes à puissances divisées commutent au changement de base il suffit d'identifier $\mathbb{Z}_{(p)}\left\{x, \frac{\phi_{(\delta)}(x)}{p}\right\} \simeq \mathscr{D}^\infty(\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}, (x))$ (ce qui est [BS19, Lemma 2.35]).

Le résultat clef est que, par [BS19, Lemma 2.34], si $\frac{x^p}{p!} \in A$ ($\phi_{(d)}(x) \in (p)$) alors $\frac{x^n}{n!} \in A$ pour tout n, donnant l'inclusion $\mathscr{D}^\infty(\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}, (x)) \subseteq \mathbb{Z}_{(p)}\left\{x, \frac{\phi_{(\delta)}(x)}{p}\right\}$.

Par définition on a $\mathbb{Z}_{(p)}\left\{x, \frac{\phi_{(\delta)}(x)}{p}\right\} = \mathbb{Z}_{(p)}\{x, z\}/(\phi_{(\delta)}(x) - pz)_\delta$, qui s'inscrit donc dans le diagramme cocartésien de δ-anneaux

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{(p)}\{y\} \arrow[r, "y \mapsto pz"] \arrow[d, "y \mapsto \phi(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathbb{Z}_{(p)}\{z\} \arrow[d] \\ \mathbb{Z}_{(p)}\{x\} \arrow[r] & \mathbb{Z}_{(p)}\left\{x, \frac{\phi_{(\delta)}(x)}{p}\right\} \end{tikzcd} . \tag{1}$$

On peut ainsi voir $\mathbb{Z}_{(p)}\left\{x, \frac{\phi_{(\delta)}(x)}{p}\right\}$ comme le plus petit sous-δ-anneau de $\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}\left[\frac{1}{p}\right]$ contenant $\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}$ et $\frac{x^p}{p}$. Pour montrer l'inclusion restante il suffit donc, puisque $\frac{x^p}{p} = (p-1)!\frac{x^p}{p!} \in \mathscr{D}^\infty(\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}, (x))$, de vérifier que le Frobenius du δ-anneau $\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}\left[\frac{1}{p}\right]$ se restreint à un relèvement du Frobenius sur le sous-anneau $\mathscr{D}^\infty(\mathbb{Z}_{(p)}\{x\}, (x))$, ce qui est un calcul. ☐

Remarque 2 ([BS19, Remark 2.38]). On a clairement $A\left\{\phi\frac{\phi_{(\delta)}(f_i)}{p}\right\}_i = A\left\{\phi\frac{f_i^p}{p}\right\}_i$, et ces anneaux coïncident encore avec le changement de base de $A\left\{\phi\frac{f_i}{p}\right\}_i$, qui ne dépend bien que de I, selon $\phi_{(\delta)}$.

Remarque 3 (Différence avec les enveloppes prismatiques [Bha19, Lecture VI, Remark 2.2]). Au-dessus des prismes (bornés) non cristallins, les Γ-enveloppes sont différentes des enveloppes prismatiques (obtenues en remplaçant le dénominateur p par le générateur p de l'idéal). Par exemple, dans le prisme $(\mathbb{Z}_p[[q-1]], ([p]_q))$, l'enveloppe prismatique de $(\mathbb{Z}_p[[q-1]][x], (x))$ (avec la δ-structure $\delta(x) = 0$) coïncide avec la q-enveloppe à puissances divisées de la paire $(\mathbb{Z}_p[[q-1]][x], (x))$.

Théorème 4 ([BS19, Theorem 5.2]). *Soit $((A, \delta), (p))$ un prisme cristallin. Soit (I_0, γ_0) un Γ-idéal de A contenant (p), de sorte que le Frobenius $A/(p) \to A/(p)$ induit $\psi\colon A/I \to A/(p)$. Soit R une A/I-algèbre lisse, et notons $R^{(1)} := R \otimes_{A/I,\psi} A/(p)$ sa réduction modulo p tordue par le Frobenius ψ.*

Alors on a un isomorphisme canonique d'$\mathscr{E}_\infty$-algèbres dans $\mathbb{D}(A - \mathfrak{Mod})$

$$\mathbb{R}(\Gamma(R^{(1)}/A)_{\Delta}, \mathscr{O}_{\Delta}) \simeq \mathbb{R}\Gamma\left((\operatorname{Spf} R/\operatorname{Spf} A)_{\mathrm{cris},\gamma_0}, \mathscr{O}_{R/A,\mathrm{cris}}\right) \tag{2}$$

compatible avec le Frobenius.

Démonstration. La comparaison repose sur le fait de pouvoir calculer les deux cohomologies à l'aide d'un complexe d'Alexander–Čech (ainsi que le lemme ci-dessus).

Rappelons que la cohomologie cristalline de X relativement à A est calculée comme l'hypercohomologie du complexe Zariskien

$$\mathrm{CA}^\bullet(\mathscr{O}_{X/(A/(p))}) = \varprojlim_n \mathscr{D}^{n!,n}(X \hookrightarrow \overline{X}_{/A}^{\bullet+1}) \tag{3}$$

où $X \hookrightarrow \overline{X}$ est un plongement dans un A-schéma p-complètement pro-lisse. Comme $p \in I$, la limite revient à une p-complétion de $\mathscr{D}^\infty(X \hookrightarrow \overline{X}^{\bullet+1}_{/A})$.

Comme $X = \operatorname{Spf} R$ est affine, cela se traduit par le choix d'une surjection d'A-algèbres $B \twoheadrightarrow R$ avec B une δ-A-algèbre p-complètement ind-lisse, et

$$R\Gamma((R/A)_{\mathrm{cris}}) \simeq \mathscr{D}^\infty(B^{\otimes_A^{\bullet+1}}, \ker(B^{\otimes_A^{\bullet+1}} \twoheadrightarrow R))^{\widehat{}\,p} =: D^\bullet. \tag{4}$$

On peut voir $(D^\bullet \to D^\bullet/(p) \leftarrow R^{(1)})$ comme un objet cosimplicial de $(R^{(1)}/A)_{\Delta}$, et cela fournit donc une application de comparaison $\mathbb{R}\Gamma((R^{(1)}/A_{\Delta}), \mathscr{O}_{\Delta}) \to D^\bullet$.

Le fait d'avoir tordu R par le Frobenius est ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme avec les enveloppes à puissances divisées dans la comparaison entre les complexes d'Alexander–Čech cristallin et prismatique. □

Corollaire 5 ([BS19, Remark 5.3])**.** *Supposons qu'il existe une* $A/(p)$*-algèbre* $\widetilde{R}$ *telle que* $R = \widetilde{R} \otimes_{A/(p)} A/I$*, de sorte que* $R^{(1)}$ *soit simplement le tiré en arrière de* $\widetilde{R}$ *selon* ϕ*. Alors, par compatibilité de la cohomologie prismatique aux changements de base, on a*

$$\phi^*_{(\delta)}\mathbb{R}\Gamma((\widetilde{R}/A)_{\Delta}, \mathscr{O}_{\Delta}) \simeq \mathbb{R}\Gamma((\widetilde{R}/A)_{\mathrm{cris}}, \mathscr{O}_{\tilde{R}/A}). \tag{5}$$

1.2 Comparaison de Hodge–Tate cristalline

Lemme 6. *Soit* A *un anneau dans un topos. Le foncteur* $A - \mathfrak{adgc} \to A - \mathfrak{Alg}$, $B^\bullet \mapsto B^0$ *admet un adjoint à gauche, et celui-ci est donné par* $R \mapsto \Omega^\bullet_{R/A}$ *: tout morphisme d'A-algèbre* $R \to B^0$ *se prolonge de façon unique à un morphisme d'A-adgc* $\Omega^\bullet \to B^\bullet$.

Remarque 7. Rappelons que la donnée d'une A-adgc équivaut à celle d'une $A[\epsilon_{(1)}]$-algèbre (où $\epsilon_{(1)}$ est un générateur de degré 1, et vérifiant donc la relation
$\mathtt{epsilon}^2_{(1)} = 0$), avec aussi $A[\epsilon_{(1)}] = H^\bullet(S^1, A)$. Le lemme précédent revient par le théorème de HKR à dire que la S^1-A-algèbre libre sur R est $S^1 \otimes R$.

Nous allons maintenant construire l'application de comparaison de Hodge–Tate. Bien que dans cette section nous ne l'étudions que pour les prismes cristallins, la construction est valable (et sera utilisée par la suite) pour un prisme $((A, \delta), I)$ quelconque.

Soit X un A/I-schéma formel. Rappelons que l'on a un morphisme géométrique de topoï $\nu\colon \mathfrak{Faisc}((X/A)_{\Delta}) \to X_{\text{ét}}$, et l'on note

$$\Delta_{X/A} := \mathbb{R}\nu_*\mathscr{O}_{\Delta} \in \mathbb{D}(A_{X_{\text{ét}}}\!-\!\mathfrak{Mod}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\Delta}_{X/A} := \mathbb{R}\nu_*\overline{\mathscr{O}}_{\Delta} \in \mathbb{D}(\mathscr{O}_{X,\text{ét}}\!-\!\mathfrak{Mod}), \tag{6}$$

avec

$$\overline{\Delta}_{X/A} \simeq \Delta_{X/A} \otimes^{\mathbb{L}}_A A/I. \tag{7}$$

Construction 8 (Comparaison de Hodge–Tate en coordonnées). Fixons une orientation (locale) $I = (d)$. On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathscr{O}_{\Delta}/(d) \to \mathscr{O}_{\Delta}/(d^2) \to \mathscr{O}_{\Delta}/(d) \to 0, \tag{8}$$

qui par application du δ-foncteur $H^\bullet\mathbb{R}\nu_*$ induit une différentielle

$$\beta_d \colon H^\bullet(\overline{\Delta}_{X/A}) \to H^{\bullet+1}(\overline{\Delta}_{X/A}), \tag{9}$$

et donc une structure de A/I-adgc sur $(H^\bullet(\overline{\Delta}_{X/A}), \beta_d)$ qui permet d'étendre la structure d'$\mathcal{O}_X$-algèbre $\eta^0 \colon \mathcal{O}_X \to H^0(\overline{\Delta}_{X/A})$ en un morphisme d'$\mathcal{O}_X$-adgc

$$\eta^\bullet \colon (\Omega^\bullet_{X/(A/I)}, d_{dR}) \to (H^\bullet(\overline{\Delta}_{X/A}), \beta_d). \tag{10}$$

Construction 9 (Comparaison de Hodge–Tate). On peut rendre la construction indépendante d'un choix de générateur en utilisant les modules tordus de Breuil–Kisin

$$M\{\ell\} \coloneqq M \otimes_{A/I} I^\ell / I^{\ell+1} \tag{11}$$

(où M est un A/I-module, et I/I^2 un A/I-module inversible).

Alors le triangle distingué

$$\overline{\Delta}_{X/A}\{i+1\} \to \Delta_{X/A} \otimes^{\mathbb{L}}_A I^i/I^{i+2} \to \overline{\Delta}_{X/A}\{i\} \tag{12}$$

donne par passage à la cohomologie une différentielle $\beta_I \colon \mathbb{H}^i(\overline{\Delta}_{X/A})\{i\} \to \mathbb{H}^{i+1}(\overline{\Delta}_{X/A})\{i+1\}$. Finalement la structure d'$\mathcal{O}_X$-algèbre s'étend également à un morphisme d'$\mathcal{O}_X$-adgc $\eta^\bullet_X \colon \Omega^\bullet_{X/(A/I)} \to H^\bullet(\overline{\Delta}_{X/A})\{\bullet\}$.

Propostion 10 ([BS19, Corollary 5.4]). *Si* $((A, \delta), I)$ *est un prisme cristallin,* $I = (p)$, *et* R *est une* $A/(p)$*-algèbre lisse, la comparaison de Hodge–Tate* $\eta^\bullet_X$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. La comparaison entre le complexe de de Rham et sa cohomologie se fait grâce à l'isomorphisme de Cartier. □

2 Cas général en caractéristique mixte

2.1 Caractéristique mixte et comparaison de Hodge–Tate

Soit (A, I) un prisme borné, d'où en particulier orientable. Soit X un A/I-schéma formel lisse.

Construction 11 ([BS19, Construction 6.1]). Supposons choisie une orientation $I = (d)$, que le Frobenius de $A/(p)$ est plat et que $A/(d)$ est sans p-torsion. Notons $D \coloneqq \mathscr{D}^\infty(A, (d))^{\widehat{}\,p} = A\left\{\frac{\phi_{(\delta)}(d)}{p}\right\}^{\widehat{}\,p}$, et soit $\alpha \colon A \to D$ la composition de l'application canonique avec $\phi_{(\delta)} \colon A \to A$. On obtient un ∞-foncteur $\widehat{\alpha^*} \colon \widehat{\mathbb{D}}(A - \mathfrak{Mod}) \to \widehat{\mathbb{D}}(D - \mathfrak{Mod})$ de changement de base entre les ∞-catégories dérivées d'objets (p, d)-complets au sens dérivé, qui est conservatif et préserve la cohomologie prismatique par changement de base (p)-complété d'A/I-algèbres (p)-complètement lisses : explicitement, on a $\widehat{\alpha^*}\Delta_{R/A} \simeq \Delta_{R\widehat{\otimes}_A D/D}$.

Théorème 12 (Comparaison de de Rham [BS19, Theorem 6.4]). *Supposons que* $W_p(A/I)$ *est sans* p*-torsion (par exemple* A/I *est sans* p*-torsion ou* $(A, I) = (A, (p))$ *est cristallin avec* $A/(p)$ *réduit). Alors il existe un isomorphisme canonique d'*$\mathscr{E}_\infty$*-algèbres dans* $\mathbb{D}((A/I)_{X_{\text{ét}}}\text{–}\mathfrak{Mod})$

$$\Delta_{X/A}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{A,\phi_{(\delta)}}A/I \simeq \Omega^\bullet_{X/(A/I)}, \tag{13}$$

où la complétion du produit tensoriel est prise p*-adiquement.*

Théorème 13 (Comparaison de Hodge–Tate [BS19, Theorem 6.3]). *La comparaison de Hodge–Tate* $\eta^\bullet_X \colon \Omega^\bullet_{X/(A/I)} \to H^\bullet(\overline{\Delta}_{X/A})\{\bullet\}$ *est un isomorphisme.*

Remarque 14 (Comparaison de Hodge–Tate dérivée [BS19, Construction 7.6], [Bha19, Lecture VII, Proposition 4.2]). La cohomologie prismatique définit un ∞-foncteur $\Delta_{-/A}$ de la catégorie des A/I-algèbres (p, I)-complètement lisses dans l'∞-catégorie des objets (p, I)-complets de $\mathbb{D}(A - \mathfrak{Mod})$ munis d'un endomorphisme $\phi_{(\delta)}$-linéaire. On peut l'étendre à un ∞-foncteur dérivé, aussi noté $\Delta_{-/A}$, sur l'∞-catégorie des A/I-algèbres dérivées, de la façon standard, c'est-à-dire en prenant l'extension oplaxe le long de l'inclusion des algèbres discrètes (p, I)-complètement lisses dans les algèbres dérivées.

On dérive de même le foncteur $\overline{\Delta}_{-/A}$, et pour toute algèbre dérivée R on a toujours $\overline{\Delta}_{R/A} \simeq \Delta_{R/A} \otimes^{\mathbb{L}}_A A/I$.

Alors pour toute A/I-algèbre dérivée R, l'algèbre $\overline{\Delta}_{R/A}$ est muni d'une filtration croissante exhaustive $F^{HT}_\star\overline{\Delta}_{R/A}$ avec

$$\mathrm{gr}^{HT}_i \overline{\Delta}_{R/A} \simeq \wedge^i \mathbb{L}_{R/(A/I)}\{-i\}[-i]^{\wedge_p}. \tag{14}$$

Corollaire 15 (Descente étale). *L'*∞*-foncteur* $\Delta_{-/A}$ *est un faisceau* p*-complètement étale ; plus généralement, pour tout morphisme de prismes bornés* $(A, I) \to (B, IB)$ *on a* $\Delta_{R\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_A B/B} \simeq \Delta_{R/B}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_A B$*, où les complétions dérivées des produits tensoriels sont prises selon* (p) *à gauche et selon* (p, IB) *à droite. Ainsi, l'on peut définir grâce au théorème de densité la cohomologie prismatique de tout* A/I*-champ dérivé (formellement algébrique), par*

$$\Delta_{\mathcal{X}/A} = \varprojlim_{\mathbb{R}\,\mathrm{Spf}\,R \to \mathcal{X}} \Delta_{R/A} \in \mathbb{D}(A_{X_{\text{ét}}}\text{–}\mathfrak{Mod}). \tag{15}$$

2.2 Application à la perfectoïdisation

Lemme 16 (Perfection par le complexe de de Rham [Bha19, Lecture VIII, Proposition 1.5]). *Soit* R *une* $\mathbb{F}_p$ *lisse. Alors*

$$R_{\text{perf}} \coloneqq \varinjlim_{\phi} R \simeq \varinjlim_{\phi} \Omega^\bullet R/\mathbb{F}_p \simeq \varinjlim_{\phi} \mathbb{R}\Gamma((R/\mathbb{F}_p)_{\text{cris}}, \mathscr{O}_{R/\mathbb{F}_p})/(p). \tag{16}$$

Démonstration. Le dernier isomorphisme est simplement la comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie de de Rham.

Le premier est dû au fait que le Frobenius tue les formes différentielles de degré positif, par exemple $\phi(xdy) = x^p d(y^p) = px^p y^{p-1} dy = 0$. □

Remarque 17 ([Bha19, Lecture VIII, Remark 1.3]). Afin de rendre claire la structure $\mathbb{F}_p$-linéaire, on peut réécrire la colimite comme celle du diagramme $\mathbb{F}_p$-linéaire $R \xrightarrow{\phi} \phi_* R \xrightarrow{\phi} \phi_*^2 R \to \cdots$.

Définition 18 (Perfectoïdisation). *Soit* R *une* A/I*-algèbre dérivée* p*-complète.*

1. *Sa* ***perfection*** *relativement à* (A, δ) *est*

$$R_{\mathrm{perf},(A,\delta)} \coloneqq \varinjlim \left(\Delta_{R/A} \xrightarrow{\phi_S} \phi_{(\delta),*}\Delta_{R/A} \xrightarrow{\phi_S} \phi^2_{(\delta),*}\Delta_{R/A} \to \cdots \right)^{\wedge}. \tag{17}$$

2. *Sa* ***perfectoïdisation*** *est*

$$R_{\mathrm{perfd}} \coloneqq R_{\mathrm{perf},(A,\delta)} \otimes^{\mathbb{L}}_A A/I. \tag{18}$$

Propostion 19 (Perfections par le site prismatique parfait). *Rappelons que l'on peut définir le site prismatique parfait de* R/A*, le sous-site plein* $(R/A)^{\mathrm{parf}}_{\Delta}$ *de* $(R/A)_{\Delta}$ *sur les* $((B, IB), R \to B/IB)$ *avec* B *parfait ; on peut le voir également comme le site des* A/I*-algèbres perfectoïdes* B *munies d'un morphisme de* A/I*-algèbres* $R \to B$*. En particulier on voit que ce site est indépendant de* A *(et même de* A/I*) et on peut le noter aussi* $S^{\mathrm{parf}}_{\Delta}$*.*

On a alors une équivalence

$$R_{\mathrm{perf},(A,\delta)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\Gamma(S^{\mathrm{parf}}_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) \tag{19}$$

ainsi que

$$R_{\mathrm{perfd}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\Gamma(S^{\mathrm{parf}}_{\Delta}, \overline{\mathcal{O}}_{\Delta}) \simeq \varprojlim_{\substack{R \to B \\ B \text{ perfectoïde}}} B. \tag{20}$$

En particulier, comme l'indique la notation, la perfectoïdisation de R *est bien indépendante de* (A, δ)*.*

Propostion 20 ([BS19, Lemma 8.8, Proposition 8.9, Corollary 8.10]). *Il existe une topologie sur le site des schémas formels* p*-adiques, dite la topologie d'arcs. On a :*

1. *Tout schéma formel peut être arc-recouvert par un affine perfectoïde.*
2. *La restriction du préfaisceau structual* $\mathcal{O}$ *au sous-site plein sur les affines perfectoïdes est un faisceau. Il en est de même du foncteur représenté par tout schéma formel* p*-adique.*
3. *Pour tout anneau* p*-complet* R*, on a*

$$R_{\mathrm{perfd}} \simeq \mathbb{R}\Gamma((\mathrm{Spf}\, R)_{\mathrm{arc}}, \mathcal{O}_S). \tag{21}$$

En d'autres termes, la perfectoïdisation de R *coïncide avec son arc-faisceautisé.*

3 Comparaison étale

Soit $(A, (d))$ un prisme parfait, correspondant à l'anneau perfectoïde $R := A/(d)$. Soit X un schéma formel p-adique sur $\operatorname{Spf} R$.

On appelle fibre générique p-adique de R l'anneau de Tate $R[p^{-1}]$ (comparer avec la fibre générique où l'on inverse une p.u.p. de R, qui est l'anneau perfectoïde de Tate associé à R), et on a une paire de Huber (ou anneau affinoïde) $(R[p^{-1}], R)$. La fibre générique adique adique de X est $X_\eta := X \times_{\operatorname{Spf} R} \operatorname{Spa}(R[p^{-1}], R)$.

On a un morphisme géométrique de topoï $\mu\colon X_{\eta,\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$, dit de « cycles proches ».

Par [BS19, Theorem 9.1] on a une équivalence canonique

$$\mathbb{R}\mu_*(\mathbb{Z}/(p^n))_{X_{\eta,\text{ét}}} \simeq (\Delta_{X/A}[d^{-1}]/(p^n))^{\phi=1}. \tag{22}$$

Si $X = \operatorname{Spf} S$ est affine, on comprend cette équivalence comme

$$\mathbb{R}\Gamma(\operatorname{Spec}(S[p^{-1}]), \mathbb{Z}/(p^n)) \simeq (\Delta_{S/A}[d^{-1}]/(p^n))^{\phi=1}. \tag{23}$$

Par [BS19, Remark 9.3] on a aussi une équivalence de faisceaux étales sur X

$$\mathbb{Z}/(p^n)_{X_{\text{ét}}} \simeq (\Delta_{X/A}/(p^n))^{\phi=1}, \tag{24}$$

sans devoir inverser d.

4 Cohomologie prismatique et homologie de Hochschild topologique

4.1 Homologie de Hochschild topologique

Soit A un spectre en $\mathscr{E}_1$-algèbres. Son homologie de Hochschild topologique est le spectre $\mathrm{THH}(A) = A \otimes_{A \otimes_{\mathbb{S}} A} A$, qui est naturellement muni d'une action du groupe S^1. Si A est un $\mathscr{E}_\infty$-anneau, alors $\mathrm{THH}(A)$ est un aussi spectre en $\mathscr{E}_\infty$-anneaux, et ce de façon S^1-équivariante.

On définit également l'homologie cyclique négative comme les points fixes homotopiques de cette action : $\mathrm{TC}^-(A) = \mathrm{THH}(A)^{hS^1}$. Pour tout spectre S^1-équivariant E, on a une application de norme $E_{hS^1} \to E^{hS^1}$, dont la cofibre dénotée E^{tS^1} est appelée la construction de Tate de E. On définit l'homologie périodique topologique de A comme la construction de Tate de $\mathrm{THH}(A)$: $\mathrm{TP}(A) = \mathrm{THH}(A)^{tS^1}$.

Finalement, pour $E = \mathrm{THH}, \mathrm{TC}^-, \mathrm{TP}$, on note $E(A; \mathbb{Z}_p)$ la (p)-complétion de $E(A)$. On a $\pi_0 \mathrm{TC}^-(A; \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{TP}(A; \mathbb{Z}_p)$.

Exemple 21. Soit A un anneau perfectoïde. Alors $\mathrm{THH}(A) = A[u]$ avec u de degré 2 et $\mathrm{TP}(A) = \mathbb{A}_{\inf}(A)[u, u^{-1}]$.

4.2 Filtration de Nygaard et comparaison

Définition 22. *Un anneau* S (p)*-complet au sens dérivé est dit* ***semiperfectoïde*** *s'il peut s'écrire comme un quotient d'un anneau perfectoïde.*

On dit en outre que S *est quasirégulier s'il est de* $(p)^\infty$*-torsion bornée et* $\mathbb{L}_{S/\mathbb{Z}_p}[-1]$ *est* (p)*-complètement plat sur* S *(dans ce cas* S *est* (p)*-adiquement complet au sens classique).*

Soit S un anneau semiperfectoïde quasirégulier ; on note $\widehat{\Delta}_S \coloneqq \pi_0 \operatorname{TC}^-(S;\mathbb{Z}_p) \simeq \operatorname{TP}(S;\mathbb{Z}_p)$ (qui est complet relativement à une certaine filtration).

Lemme 23 ([BS19])**.** *La catégorie des prismes* (A, I) *munis d'un morphisme* $S \to A/I$ *admet un objet initial* $(\Delta_S, (d))$*, qui est en outre orientable.*

Remarque 24. La complétion (p)-adique de $\Delta_{S,\mathrm{perf}}/(d)$ est la perfectoïdisation de S.

Définition 25. *La* ***filtration de Nygaard*** *sur* Δ_S *est donnée par* $F^i_N\Delta_S = \{x \in \Delta_S \mid \phi(x) \in d^i\Delta_S\}$*.*

Théorème 26 ([BS19, Theorem 12.2])**.** *On a* $\operatorname{gr}^i_N \Delta_S \simeq F^{\mathrm{HT}}_i\overline{\Delta}_S\{i\}$*. Plus généralement, l'image de* $F^i_N\Delta_S \xrightarrow{\frac{\phi}{d^i}} \Delta_S \twoheadrightarrow \overline{\Delta}_S$ *est* $F^{\mathrm{HT}}_i\overline{\Delta}_S$*.*

Théorème 27 ([BS19, Theorem 13.1])**.** *La complétion de* Δ_S *relativement à la filtration de Nygaard est* $\widehat{\Delta}_S$*.*

Théorème 28 (Notes de Chao Li)**.** *Soit* (A, I) *un prisme parfait et* B *lisse sur* A/I*. Il existe une filtration* $F^\star_{\mathrm{mot}} \operatorname{TP}(B)$ *avec*

$$\operatorname{gr}^\bullet_{\mathrm{mot}} \operatorname{TP}(S) \simeq \Delta_{S/A} \otimes_A A[u, u^{-1}]. \tag{25}$$

Références

[Bha19] *Geometric aspects of* p*-adic Hodge theory*

[BS19] Bhargav Bhatt et Peter Scholze, *Prisms and prismatic cohomology*