Construction de fonctions-τ de courbes quantiques par la récurrence topologique

17 et 29 janvier, 26 février 2019

1 Espace de modules des courbes spectrales

1.1 Courbes spectrales

Définition 1 (Courbe spectrale)**.** *Considérons la donnée d'une surface de Riemann Σ munie*

- *d'un plongement méromorphe $i = (x, y)\colon \Sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ tel que les zéros de dy soient distincts de ceux de dx, appelés les **points de ramification** (qui doivent être doubles), et*
- *d'un noyau de Bergmann $B \in H^0\left(\Sigma^2, \mathrm{Sym}^{\boxtimes 2}(\mathcal{K}_\Sigma)(2\Delta_\Sigma)\right)$, une bidifférentielle symétrique sur Σ^2 avec un pôle double (normalisé à 1) sur la diagonale, donc s'écrivant localement $B(z_1, z_2) = \frac{dz_1\, dz_2}{(z_1-z_2)^2}$ (où on écrit $dz_1\, dz_2 = \frac{1}{2}(dz_1 \boxtimes dz_2 + dz_2 \boxtimes dz_1)$).*

Une reparamétrisation est un difféomorphisme $\phi\colon \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ induisant $\phi^*\widetilde{x} = x$, $\phi^*\widetilde{y} = y$ et $\phi^*\widetilde{B} = B$.

*Une **courbe spectrale régulière** $\mathcal{S}$ est une classe d'équivalence de telles données modulo reparamétrisations.*

Au voisinage d'un point de ramification $a \in \Sigma$ (celui-ci étant supposé double), il existe une "involution locale de Galois" σ_a avec $x(\sigma_a(z)) = x(z)$ (correspondant au changement de feuillet dans le revêtement double).

Remarque 2. Notons $\Sigma_0 = \mathbb{C}$; on préfère alors voir $\mathbb{C}^2$ comme l'espace symplectique $T^\vee_{\Sigma_0}$ (avec sa forme symplectique canonique $\omega = d\theta$ où $\theta = p \cdot dq$ dans les coordonnées $q \in \Sigma_0, p \in T^\vee_{\Sigma_0,q}$). Cela induit une forme $\theta|_{i(\Sigma)} = y \cdot dx$ sur l'image de Σ par le plongement (x, y).

En choisissant une coordonnée complexe z sur Σ, on a donc $i^*\, d\theta|_\Sigma(z) = -\partial_z x \partial_z y \cdot dz \wedge dz = 0$, soit l'image de Σ est une sous-variété Lagrangienne de $T^\vee_{\Sigma_0}$.

Exemple 3 (Lien avec les systèmes intégrables). Un système intégrable classique, c'est-à-dire une variété hamiltonienne $\left(\mathcal{M}, \omega \in \ker\left(d\colon \Gamma(\Omega^2_\mathcal{M}) \to \Gamma(\Omega^3_\mathcal{M})\right), H \in \Gamma(\mathcal{O}_\mathcal{M})\right)$ avec n quantités $f_1 = H, \dots, f_n$ en involution (*i.e.* $\{f_i, f_j\} = 0$), et donc conservées (par $\{H, f_i\} = 0$), peut être encodée par une **paire de Lax**, deux fonctions matricielles $L, M \in$

$\Gamma(\mathrm{Mat}_N(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[x]))$ respectant l'équation d'évolution de Lax

$$\frac{d}{dt}L(m(t),x) = [L(m(t),x), M(m(t),x)] \tag{1}$$

pour toute courbe $m\colon [0,1] \to \mathcal{M}$. Cette équation est la condition de cohérence nécessaire pour que l'évolution d'un vecteur propre v de L soit donnée par M : $\frac{d}{dt}v = Mv$; en particulier, elle implique que le spectre de L est conservé, et est donc aussi appelée équation isospectrale. Ainsi, les combinaisons symétriques de valeurs propres de L — par exemple les $\mathrm{Tr}(L^n)$ — fournissent des quantités conservées du système intégrable.

On peut alors s'intéresser au lieu des valeurs propres de L, qui est donné par la courbe $P(x,y) = \det(y\,\mathrm{id} - L(x)) = 0$. Réciproquement, la géométrie de la courbe spectrale $\Sigma = \{P(x,y) = 0\}$ permet de reconstruire le système intégrable. En tout paramètre x, on a la matrice de valeurs propres $Y(x) = \mathrm{diag}(y_i(x))_{1\leq i\leq \deg_y P}$, et on cherche donc la matrice de passage $V(x,t)$ permettant de définir $L(x,t) = V(x,t)Y(x)V(x,t)^{-1}$ et $M(x,t) = \partial_t(V(x,t))V(x,t)^{-1}$. Le problème est donc la construction de $(\deg_y P)^2$ fonctions $\Sigma \to \mathbb{C}$. Pour ce faire, on utilise la factorisation par $\Sigma \to \mathrm{Jac}(\Sigma) \simeq \mathbb{C}^g/(T\cdot\mathbb{Z}^g)$, et les fonctions recherchées $\mathrm{Jac}(\Sigma) \to \mathbb{C}$ peuvent être obtenues à partir de fonctions thêta.

La surface de Riemann Σ étant de dimension complexe 1, son corps de fonctions rationnelles est également de $\mathbb{C}$-degré de transcendance 1, et x et y sont donc reliées par un polynôme $P \in \mathbb{C}[x,y]$. En particulier, pour tout $z \in \Sigma$ on a $P(x(z),y(z)) = 0$ et l'image de Σ par i s'identifie à la courbe plane $\{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(X,Y) = 0\}$.

Remarque 4. Si Σ est de genre 0, c'est-à-dire $\Sigma \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, alors le noyau de Bergmann est uniquement déterminé, $B(z_1,z_2) = \frac{dz_1\,dz_2}{(z_1-z_2)^2}$. En genre 1, quand Σ est une courbe elliptique, il faut rajouter une série d'Eisenstein.

Définition 5 (Courbe spectrale quantique)**.** *Une courbe spectrale quantique est un $\mathcal{D}$-module de Rees sur $\Sigma_0 = \mathbb{C}$ dont le symbole classique recouvre la courbe spectrale, où l'on rappelle que la construction de Rees associe à l'$\mathcal{O}_{\Sigma_0}$-algèbre associative $\mathcal{D}$ munie de sa filtration $\mathcal{D}_i \subset \cdots \subset \mathcal{D}$ par ordre des opérateurs différentiels l'$\mathcal{O}_{\Sigma_0}[[\hbar]]$-algèbre $\bigoplus_i \hbar^i\mathcal{D}_i$.*

Concrètement, il s'agit d'un opérateur différentiel $\widehat{P}(x,\hbar\partial_x)$ tel que $\lim_{\hbar\to 0} e^{\frac{-x\xi}{\hbar}}\widehat{P}(x,\hbar\partial_x)e^{\frac{x\xi}{\hbar}} = P(x,\xi)$.

1.2 Déformations locales

Fixons une courbe spectrale $\mathcal{S}_0 = (\Sigma, x_0, y_0, B_0)$, pour simplifier de genre 0. Nous allons considérer des déformations de $\mathcal{S}_0$ laissant la surface sous-jacente Σ invariante.

Définition 6 (Modifications méromorphes)**.** *Une courbe spectrale $\mathcal{S} = (\Sigma, x, y, B)$ est une* ***modification méromorphe*** *de $\mathcal{S}_0$ si $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ et $(B-B_0)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec au plus un nombre fini de singularités, et en tout point de $\Sigma_0 = \mathbb{C}$ où x_0 et x sont localement inversibles, la fonction $(y_0x_0^{-1} - yx^{-1})$ est localement méromorphe et la bidifférentielle $x_{0,*}B_0 - x_*B$ est localement bi-holomorphe.*

On note $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}_0}$, ou simplement $\mathfrak{S}$, l'espace de modules des modifications méromorphes de $\mathcal{S}_0$. Il s'agit d'une sous-*variété* du *champ* de modules des courbes spectrales.

Théorème 7. *L'espace cotangent $T_{\mathcal{S}}\mathfrak{S}$ en une courbe $\mathcal{S}$ est donné par l'espace $\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ des 1-formes méromorphes sur Σ.*

Esquisse de démonstration. Considérons une courbe spectrale $\mathcal{S}$ déformation au premier ordre de $\mathcal{S}_0$, et notons $\delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$, et $\delta B = B - B_0$. Soit Γ_δ le vecteur tangent induisant cette déformation. Les courbes spectrales étant définies modulo reparamétrisation, on peut faire en sorte que la déformation s'effectue à x maintenu constant en composant par une reparamétrisation. La déformation est alors entièrement caractérisée par la forme $\Omega_\delta = \delta y \, dx - \delta x \, dy$. Comme la courbe est de genre 0, les déformations de B sont entièrement déterminées (sinon il faudrait une symétrisation de deux autres copies du $\mathfrak{M}^1$). $\square$

On cherche à étudier l'espace de déformations, c'est-à-dire l'espace tangent ; il est donc isomorphe à un certain sous-espace du dual linéaire du cotangent.

Définition 8 (Cycles généralisés)**.** — *On appelle* ***cycle généralisé*** *une paire, notée $f \cdot \gamma$, d'une fonction méromorphe f et d'un(e classe d'homotpie de) cycle γ. La fonction f est vue comme un « jacobien » pour l'intégration sur γ.*

— *Les cycles généralisés agissent sur les éléments de $\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ (les formes méromorphes) par intégration, appliquant ω sur $\int_\gamma f\omega$. On a une application $\widehat{B}$ appliquant un cycle généralisé $\Gamma = f \cdot \gamma$ sur la forme $\widehat{B}(\Gamma)(z) = \int_{\zeta \in \gamma} f(\zeta) B(\zeta, z)$.*

— *Un cycle généralisé Γ est dit un* ***cycle méromorphe*** *si $\widehat{B}(\Gamma)$ est une forme méromorphe.*

Remarque 9. On distingue trois types de cycles méromorphes.

1. Si γ est un cycle holomorphe, alors la forme $\widehat{B}(\gamma \cdot f)$ présente une singularité lorsque sa variable croise γ à moins que f soit constante. Les cycles **de première espèce** sont donc classifiés par $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H_1(\Sigma, \mathbb{C})$.
2. Si γ est un "ind-cercle" $\mathcal{C}_p$ (un cycle "infinitésimal" formel, *i.e.* la colimite d'un système inductif de cycles) entourant un point p, alors f peut être n'importe quelle fonction ayant un pôle en p. Ces cycles **de second espèce** peuvent être décomposés
3. On permet également à γ d'avoir un diviseur de bord non nul, mais tout de même de degré 0 : on note $\gamma_{p \to q}$, avec $\partial \gamma_{p \to q} = [q] - [p]$. Pour ces cycles **de troisième espèce**, f doit aussi être constante.

On note $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ l'espace des cycles méromorphes. On notera également $\widehat{B}$ la restriction de $\widehat{B}$ à $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$.

Lemme 10. *$\mathfrak{M}_1$ a une structure symplectique donnée par*

$$\Gamma \cap \Gamma' = \begin{cases} \Gamma \cap \Gamma' & \textit{si } \Gamma \in H_1 \textit{ et } \Gamma' \textit{ est de première ou troisième espèce} \\ \delta_{p,p'} \oint_{\mathcal{C}_p} f \, df' & \textit{si } \Gamma = \mathcal{C}_p \cdot f \textit{ et } \Gamma' = \mathcal{C}_{p'} \cdot f' \\ (\delta_{q,p'} - \delta_{p,p'}) f'(p') & \textit{si } \Gamma = \gamma_{p \to q} \textit{ et } \Gamma' = \mathcal{C}_{p'} \cdot f' \textit{ avec } f'(p) \neq \infty \\ \Gamma \cap \Gamma' + \frac{1}{2} \sum_{(i,i')} \pm \delta_{i,i'} & \textit{si } \Gamma = \gamma_{p \to q} \textit{ et } \Gamma' = \gamma_{p' \to q'} \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases} \tag{2}$$

et ker $\widehat{B}$ *en est une lagrangienne.*

Démonstration. On a $2\imath\pi \cdot \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \int_{\Gamma_1} \widehat{B}(\Gamma_2) - \int_{\Gamma_2} \widehat{B}(\Gamma_1)$ (vérifié analytiquement) ; le lemme s'ensuit immédiatement. □

Propostion 11. *L'application* $\widehat{B}$ *est surjective, donc on a une suite exacte* $0 \to \ker \widehat{B} \hookrightarrow \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) \xrightarrow{\widehat{B}} \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C}) \to 0$.

Démonstration. En considérant les cycles de la forme $f \cdot \mathcal{C}_p$, l'application de $\widehat{B}$ permet d'obtenir des formes avec des pôles de tous ordres en des points quelconques. □

L'espace tangent est donc obtenu par un choix de polarisation relativement à $\ker \widehat{B}$ de l'espace symplectique $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ (ou, de façon équivalente, par des choix de représentants modulo $\ker \widehat{B}$ des éléments de $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$).

Théorème 12 (Flot de déformation)**.** [*Eyn-*τ*, Proposition 3.5*] *Soit* Γ *un cycle de déformation (entier). Il existe* $r \in \mathbb{R}$ *et une famille à un paramètre* $(\mathcal{S}_t)_{0<t<r}$ *de modifications de* $\mathcal{S}_0$. □

On écrit aussi $\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0 + t\gamma$.

2 Construction perturbative de la fonction-τ

2.1 Invariants de récurrence topologique

Définition 13. *Soit* $\mathcal{S} = (\Sigma, x, y, B)$ *une courbe spectrale. On pose* $\omega_{0,1} = y\,dx \in \Gamma^{\mathrm{mero}}(\Sigma, \mathcal{K}_\Sigma)$ *et* $\omega_{0,2} = B \in \Gamma^{\mathrm{mero}}(\Sigma^2, \mathcal{K}_\Sigma^{\boxtimes 2})$.

On définit également le ***noyau de récurrence***

$$K_a(z, z') = \frac{-1}{2} \frac{\int_{\zeta=\sigma_a(z')}^{z'} \omega_{0,2}(z, \zeta)}{\omega_{0,1}(z') - \omega_{0,1}(\sigma_a(z'))} \in \Gamma(\Sigma, \mathcal{K}_\Sigma \boxtimes \mathcal{K}_\Sigma^\vee) \tag{3}$$

dans tout voisinage d'un point de ramification a *où l'involution* σ *est définie.*

Finalement, on définit par récurrence

$$\begin{aligned}
&\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \\
&= \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta \to a} K_a(z_1, \zeta) \left(\omega_{g-1,n+1}(\zeta, \sigma_a(\zeta), z_2, \dots, z_n) + \sideset{}{'}\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I_1 \sqcup I_2 = [\![2,n]\!]}} \omega_{g_1,1+|I_1|}(\zeta, z_{I_1}) \omega_{g_2,1+|I_2|}(\sigma_a(\zeta), z_{I_2}) \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

où la $\sum'$ *indique que les cas* $(g_1 = 0, I_1 = \emptyset)$ *et* $(g_2 = 0, I_2 = \emptyset)$ *sont exclus.*

Exemple 14. [EO-ωRT, Théorème 4.1] Pour $(g,n) = (0,3)$,

$$\begin{aligned}
&\omega_{0,3}(z_1,z_2,z_3)\\
=&\frac{-1}{2}\sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta\to a} \frac{\int_{\sigma_a(\zeta)}^{\zeta}\omega_{0,2}(-,z_1)}{\omega_{0,1}(\zeta)-\omega_{0,1}(\sigma_a(\zeta))}\big(\omega_{0,2}(\zeta,z_2)\omega_{0,2}(\sigma_a(\zeta),z_3)+\omega_{0,2}(\zeta,z_3)\omega_{0,2}(\sigma_a(\zeta),z_2)\big)\\
=&\sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta\to a}\frac{B(\zeta,z_1)B(\zeta,z_2)B(\zeta,z_3)}{dx(\zeta)\,dy(\zeta)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Remarque 15. Les invariants sont définis par une récurrence sur $\chi_{g,n} = 2g-2+n$, interprété comme une caractéristique d'Euler de surfaces de Riemann à n bords et de genre g.

En fait ils admettent également une expression en termes de sommes de poids associés à certains graphes.

Propostion 16 (Propriétés des invariants)**.** *Les invariants de la récurrence topologique respectent :*

- ***symétrie :*** *les $\omega_{g,n}$ sont invariants par action du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ par permutation des variables[EO-ωRT, Théorème 4.6] (y compris la première !) ; en outre leur définition implique[EO-ωRT, Théorème 4.2] qu'ils ne peuvent avoir de pôles qu'aux points de ramification : $\omega_{g,n} \in \Gamma\left(\Sigma^n, \mathrm{Sym}^{\boxtimes n}\mathcal{K}_\Sigma(R)\right)$ où R est le diviseur de ramification*
- ***invariance symplectique et propriétés modulaires :*** *[EO-ωRT, Théorèmes 7.1, C.1, C.2 ; Théorème 6.2] Les primitives (et donc les invariants eux-mêmes, cf plus tard) des $\omega_{g,n}$ sont invariants par symplectomorphismes et sont des formes quasi-modulaires (pour une action sur B)*
- ***homogénéité :*** *Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, x, y, B)$ une courbe spectrale et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Alors[EO-ωRT, Théorème 5.3] les invariants de la courbe remise à l'échelle $\lambda\mathcal{S} = (\Sigma, x, \lambda y, B)$ vérifient $\omega_{g,n}(\lambda\mathcal{S}; z_1,\dots,z_n) = \lambda^{2-2g-n}\omega_{g,n}(\mathcal{S}; z_1,\dots,z_n)$, i.e. les invariants sont homogènes de degré $-\chi_{g,n}$.*
- ***décomposition sur une base :*** *Soient a un point de ramification et $k \geq 0$; on définit la 1-forme méromorphe*

$$\Xi_{a,k}(z) = \operatorname*{Res}_{z'\to a}\int_a^{z'} B(z,-)\frac{(2k+1)\,dz'}{(z')^{2k+2}} = -\operatorname*{Res}_{z'\to a} B(z,z')\frac{-(2k-1)!!}{2^k\sqrt{x(z')-x(a)}^{2k+1}}. \tag{6}$$

Alors[Eyn-Λ, Proposition 4.1][ABCO, Lemme 9.1] il existe des coefficients $W_{g,n}\binom{a_1\cdots a_n}{k_1\cdots k_n}$ avec une décomposition

$$\omega_{g,n}(z_1,\dots,z_n) = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_n\\ k_1,\dots,k_n}} W_{g,n}\binom{a_1\cdots a_n}{k_1\cdots k_n}\prod_{i=1}^n \Xi_{a_i,k_i}(z_i). \tag{7}$$

Notons qu'il existe en outre des espaces de modules de courbes stables "colorées" par les points de ramifications, munis de certaines classes de Hodge (définies de façon combinatoire), telles que les coefficients puissent s'exprimer[Eyn-Λ, Théorème 4.1] comme des intégrales (des nombres d'intersection) de ces classes de Hodge couplées à des classes tautologiques (psi et kappa).

□

Lemme 17 (Déformation des invariants)**.** *Soit* Γ *un cycle méromorphe de déformation, et* δ_Γ *la déformation lui correspondant.*

— *La déformation est déterminée par la forme* $\Omega_{\delta_\Gamma}(z) = \delta_\Gamma y(z)\, dx(z) - \delta_\Gamma x(z)\, dy(z) = \delta_\Gamma(y(z)\, dx(z))$ *telle que* $\widehat{B}(\Gamma) = \Omega_{\delta_\Gamma}$. *Par définition, on a donc*

$$\delta_\Gamma(\omega_{0,1}) = \Omega_{\delta_\Gamma} = \widehat{B}(\Gamma) = \int_\Gamma B = \int_\Gamma \omega_{0,2} \tag{8}$$

— *Par la formule variationnelle de Rauch, on a*

$$\begin{aligned} \delta_\Gamma B(z_1, z_2) &= \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta \to a} \frac{B(z_1, \zeta) B(z_2, \zeta)}{dx(\zeta)^2} \frac{\Omega_{\delta_\Gamma}(\zeta)}{dy(\zeta)} \\ &= \int_{z_3 \in \Gamma} \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta \to a} \frac{B(z_1, \zeta) B(z_2, \zeta) B(\zeta, z_3)}{dx(\zeta)\, dy(\zeta)}, \end{aligned} \tag{9}$$

soit (en reconnaissant la formule de récurrence topologique) $\delta_\Gamma(\omega_{0,2}) = \int_\Gamma \omega_{0,3}$.

— *On a en fait plus généralement*

$$\delta_\Gamma(\omega_{g,n}) = \int_\Gamma \omega_{g,n+1}. \tag{10}$$

Remarque 18. Ceci donne une forme explicite de l'isomorphisme $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) / \ker \widehat{B} = \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} T_{\mathcal{S}}\mathfrak{S}$ par $[\Gamma] \mapsto \partial_\Gamma = \delta_\Gamma$, déterminé par l'effet sur $\omega_{0,1}$ et $\omega_{0,2}$. Dans le cas où Σ est de genre positif, l'opérateur différentiel serait aussi donné par les déformations (cette fois non uniquement déterminées) de B.

2.2 Énergie libre

Les formules de déformation ci-dessus impliquent que des invariants à 0 points marqués, si ils existent, déterminent et sont déterminés par les intégrales des invariants supérieurs.

Remarque 19 (Opérateur de Hirota). Pour tout point $p \in \Sigma$, on a $\partial_{f \cdot \mathcal{C}_p}(\omega_{0,1}(z)) = \frac{B(z,p)}{\upsilon(p)}$, où la forme υ compense le défaut de dépendance en p de $\omega_{0,1}$. Si l'on veut que ν soit la forme dx, il faut que f soit la fonction $z \mapsto \frac{1}{2\imath\pi(x(z) - x(p))}$, puisqu'alors $\partial_{f\mathcal{C}_p} \omega_{0,1} = \frac{1}{2\imath\pi} \oint_{\zeta \in \mathcal{C}_p} \frac{B(z,\zeta)}{x(\zeta) - x(p)} = \frac{B(z,p)}{dx(p)}$.

On appelle $\Delta_p = dx(p) \boxtimes \partial_{f_p \mathcal{C}_p}$ l'**opérateur de Hirota**. Il vérifie par définition que $\Delta_p \omega_{0,1}(z) = \omega_{0,2}(z, p)$, en et fait plus généralement[Eyn-τ, Théorème 3.3] que

$$\Delta_p \omega_{g,n}(z_1, \ldots, z_n) = \omega_{g,n+1}(z_1, \ldots, z_n, p). \tag{11}$$

Ainsi on obtient que pour tout cycle méromorphe Γ, on a $\partial_\Gamma \omega_{g,n} = \int_{p\in\Gamma} \Delta_p \omega_{g,n+1}$, ce que l'on écrit aussi comme un accouplement $\partial_\Gamma = \langle \Gamma, \Delta_\bullet \rangle = \int_\Gamma \Delta_\bullet$.

Notons toutefois que l'opérateur de Hirota n'est bien défini que modulo $\ker \widehat{B}$, c'est-à-dire après un choix de polarisation $\mathcal{L}$ du $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$. $\square$

Ainsi les invariants de degré 0 recherchés, que nous noterons $\mathcal{F}_g = \omega_{0,g}$, se doivent de vérifier $\Delta_p \mathcal{F}_g = \omega_{g,1}(p)$.

Plus précisément, lorsque les équations $\partial_\Gamma \mathcal{F}_g = \int_\Gamma \omega_{g,1}$ sont bien définies, elles déterminent entièrement $\mathcal{F}_g$, qui pour $g \geq 2$ peut être calculé par

$$\mathcal{F}_g = \frac{1}{2-2g} \sum_a \operatorname*{Res}_a \omega_{g,1} F_{0,1}, \tag{12}$$

où pour tous (g, n), la fonction $F_{g,n}$ est une primitive $\int \cdots \int \omega_{g,n}$, telle que $(\partial_{z_1}(-)\, dz_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \partial_{z_n}(-)\, dz_n) F_{g,n} = \omega_{g,n}$. La question est de savoir quand ces équations de contraintes sont bien définies, c'est-à-dire compatibles avec le quotient modulo $\ker \widehat{B}$. Pour $(g, n) \neq (0, 1)$, l'intégrale $\int_\Gamma \omega_{g,n}$ s'annule sur tout cycle $\Gamma \in \ker \widehat{B}$ donc le membre de droite est bien défini. Cependant, si l'on cherche à imposer la contrainte $\partial_\Gamma \mathcal{F}_0 = \int_\Gamma \omega_{0,1}$ pour tous cycles méromorphes Γ, on aurait alors $\partial \Gamma_1 \partial_{\Gamma_2} \mathcal{F}_0 - \partial_{\Gamma_2} \partial_{\Gamma_1} \mathcal{F}_0 = 2\imath\pi \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ qui brise la condition de courbure nulle à moins de se restreindre à ne considérer que des cycles dans un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$, donc à en fixer une polarisation. En résumé, la formulation globale avec l'opérateur de Hirota impose de choisir une polarisation, et celle-est en fait nécessaire uniquement pour $\mathcal{F}_0$, les $\mathcal{F}_{g\geq 1}$ étant bien définis indépendamment.

Mais l'on veut définir $\mathcal{F}_0$ comme une fonction sur les modifications de $\mathcal{S}$, donc étant donné une polarisation $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ en $[\mathcal{S}]$ il nous faut un moyen de la transporter le long de l'espace de modules.

Définition 20 (Cycles entiers). ***Premiere espèce :*** *On rappelle que l'espace des cycles de première espèce est* $H_1(\Sigma, \mathbb{C})$*. Il contient le réseau* $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$*.*

Deuxième espèce : *Pour* $p \in \Sigma$ *et* $k \in \mathbb{Z}$*, on définit le* ***cycle entier***

$$\gamma_{p,k} = \begin{cases} (x(-) - x(p))^k \cdot \mathcal{C}_p & k \geq 0 \\ \left(\frac{1}{k}(x(-) - x(p))^k\right) \cdot \frac{-1}{2\imath\pi} \cdot \mathcal{C}_p & k < 0 \end{cases}. \tag{13}$$

En particulier, on retrouve $\Delta_p = dx(p) \boxtimes \partial_{\gamma_{p,-1}}$*.*

Troisième espèce : *Comme dans* H_1*, on peut choisir de prendre des chaînes avec coefficients entiers.*

Lemme 21. *La famille des cycles entiers* $\{\gamma_{p,k}\}_{p\in\Sigma, k\in\mathbb{Z}}$ *forme un réseau dans l'espace des cycles de seconde espèce, donc la réunion des cycles entiers de toute espèce définit un réseau* $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \subset \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$*.* $\square$

Corollaire 22. *Les cycles entiers étant rigides, ils permettent de définir une connexion* (*triviale*) *sur le fibré tangent de* $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}_0}$*.*

Démonstration. Soit $\{\gamma_1, \dots, \gamma_K\}$ une base de cycles entiers ; on décompose ainsi tout cycle méromorphe $\Gamma = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i(\Gamma)\gamma_i, \alpha_i \in \mathbb{C}$, et on demande que les coefficients α_i soient transportés (*i.e.* constants). $\square$

Ainsi la polarisation $\mathcal{L}$ s'étend à l'espace de modules, et l'on peut définir $\mathcal{F}_{0,\mathcal{L}} = \omega_{0,0;\mathcal{L}}$ tel que $\Delta_p \mathcal{F}_{0,\mathcal{L}} = \omega_{0,1}(p)$.

Construction 23. On va définir la fonction τ de la courbe spectrale comme une quantification de l'« énergie libre » $\mathcal{F}_0$, c'est-à-dire devant vérifier

$$\hbar\, \Delta_p \ln \tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = \widehat{\omega}_1(\mathcal{S}; p; \hbar) \tag{14}$$

où pour tout $n \geq 0$ on a posé $\widehat{\omega}_n(\mathcal{S}; z_1, \dots, z_n, \hbar) = \sum_{g \geq 0} \hbar^{-\chi_{g,n}} \omega_{g,n}(\mathcal{S}; z_1, \dots, z_n)$. De façon équivalente,

$$\forall \Gamma \in \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}), \hbar \partial_\Gamma \ln \tau_{\hbar,\mathcal{L}} = \int_\Gamma \widehat{\omega}_1(-, \hbar). \tag{15}$$

La fonction τ peut être construite comme série formelle suivant la formule

$$\tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = \exp(\widehat{\omega}_0(\mathcal{S})) = \exp\left(\sum_{g \geq 0} \hbar^{-\chi_{g,0}} \mathcal{F}_{g,\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \right) ; \tag{16}$$

il s'agit nécessairement d'une solution formelle (en fait de rayon de convergence nul) car les énergies libres ont en général un comportement asymptotique en $\mathcal{F}_g \sim g!$.

Par homogénéité des invariants, la fonction τ quantifiée au paramètre $\hbar$ correspond en fait à la fonction τ normalisée ($\hbar = 1$) de la courbe remise à l'échelle : $\tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = \tau_{\mathcal{L}}(\hbar^{-1}\mathcal{S})$.

Remarque 24. Ayant fixé une « direction » de déformation $\Gamma \in \mathcal{L}$, on peut développer en série de Taylor les invariants $\omega_{g,n}$ le long d'un flot infinitésimal, ce qui par la correspondance entre dérivées et intégrales des invariants supérieurs donne

$$\omega_{g,n}(\mathcal{S}_0 + \hbar\Gamma) = \sum_{k \geq 0} \frac{\hbar^k}{k!} \underbrace{\int_\Gamma \cdots \int_\Gamma}_{\text{k fois}} \omega_{g,n+k}(\mathcal{S}_0) \tag{17}$$

(ce qui est en fait tautologique ou circulaire puisque c'est ainsi que l'on peut définir le flot le long d'un cycle méromorphe) et donc en particulier pour la fonction τ

$$\sum_{g \geq 0} \hbar^{-\chi_{g,0}} \mathcal{F}_g(\mathcal{S}_0 + \hbar\Gamma) = \sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 0}} \frac{\hbar^{-\chi_{g,n}}}{n!} \int_\Gamma \cdots \int_\Gamma \omega_{g,n}(\mathcal{S}_0). \tag{18}$$

Théorème 25. [*BE-ψ*][*Eyn-τ, Théorème 5.3*] *En suivant le cycle de troisième espèce $[z_0, z]$ et en normalisant par le terme $n = 0$, la « fonction d'onde »*

$$\Psi_{\hbar,z_0}(z) = \frac{\tau_\hbar(\mathcal{S}_0 + \hbar[z_0, z])}{\tau_\hbar(\mathcal{S}_0)} = \exp\left(\sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 1}} \frac{\hbar^{-\chi_{g,n}}}{n!} \int_{z_0}^{z} \cdots \int_{z_0}^{z} \omega_{g,n}(\mathcal{S}_0) \right) \tag{19}$$

est une solution de la courbe spectrale quantique de $\mathcal{S}_0$.

3 Lien avec le formalisme des structures d'Airy

3.1 Noyaux de Bergmann et lagrangiens

Remarque 26 (Sous-structures d'Airy). Une **pré-structure d'Airy** quantique sur un espace vectoriel V est simplement la donnée de tenseurs $A \in V^{\otimes 3}$, $B \in V^{\vee} \otimes V^{\otimes 2}$, $C \in (V^{\vee})^{\otimes 2} \otimes V$ et $D \in V$. Une pré-structure d'Airy classique est la même donnée sans le D. Une sous-pré-structure d'Airy est un sous-espace vectoriel $U \subset V$ stable par A, B, C (et D pour le cas quantique), c'est-à-dire $A \in U^{\otimes 3}$ (et $D \in U$), et $B(U) \subset U \otimes U$, $C(U \otimes U) \subset U$ (par exemple, une sous-pré-structure d'une structure d'Airy est un morphisme de structures d'Airy dont le morphisme d'espaces vectoriel sous-jacent est une inclusion).

On dit qu'une pré-structure d'Airy (classique ou quantique) sur un espace vectoriel V est **primitive** si elle ne contient pas de sous-structure propre non triviale. Toute pré-structure d'Airy (classique ou quantique) contient une unique sous-pré-structure primitive.

Si une structure d'Airy classique (resp. quantique) sur V admet une sous-pré-structure U, alors la fonction S_0 (resp. les fonctions S_g) obtenue par récurrence topologique abstraite sur V ne dépend que des coordonnées sur U et est constante en les autres (*i.e.* sur les fibres de $V^{\vee} \twoheadrightarrow U^{\vee}$). Ainsi, pour étudier les fonctions S_g d'une structure d'Airy il suffit de se restreindre à l'étude de sa sous-structure primitive.

Remarque 27 (Courbe spectrale locale). Pour produire les invariants de la récurrence topologique, l'ensemble des données géométriques de la courbe spectrale n'est pas nécessaire : puisque la formule de la récurrence topologique calcule des résidus aux points de branchements, il suffit d'avoir des germes de polydifférentielles en ces points, ce qui est connu sous le nom de courbe spectrale locale. Une **courbe spectrale locale** est donc une collection de disques U_a voisinages des points de ramification $a \in \mathrm{Ram}$, avec des germes de 1-formes $\omega_{0,1}$ et de noyaux de Bergman.

Localement, les points de ramification étant supposés d'ordre 2, on retrouve le comportement de la courbe d'Airy $x(z) = y(z)^2$ (et $y(z) = z$), avec $\omega_{0,1} = y\,dx = 2y^2\,dy$ et l'involution locale $\sigma_a \colon z \mapsto -z$ donnant $\omega_{0,1}(z) - \omega_{0,1}(-z) = 4z^2\,dz$. Le noyau de Bergmann $\omega_{0,2}$ peut s'écrire comme une matrice (de type $\mathrm{Ram} \times \mathrm{Ram}$) à valeurs de bidifférentielles, donnée dans les diagonales des disques par le noyau canonique, et à laquelle doit s'ajouter une partie régulière (remplaçant la topologie de la courbe) caractérisée par des coefficients scalaires $P^{a_1,a_2}_{n_1,n_2}$, $a_i \in \mathrm{Ram}$, $n_i \geq 1$ vérifiant $P^{a_1,a_2}_{n_1,n_2} = P^{a_2,a_1}_{n_2,n_1}$:

$$\omega_{0,2}(z,z')_{a_1,a_2} = \frac{\delta_{a_1,a_2}\,dz\,dz'}{(z-z')^2} + \sum_{n_1,n_2 \geq 1} P^{a_1,a_2}_{n_1,n_2} z^{n_1-1}(z')^{n_2-1}\,dz\,dz'. \tag{20}$$

Nous viendrons plus tard au noyau de récurrence.

Définition 28 (Espace des différentielles méromorphes formelles)**.** *On définit l'espace vectoriel de Tate W_{Airy} comme le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}((z))\,dz$ engendré par les germes de formes méromorphes $a \otimes z^n\,dz$ avec $a \in \mathrm{Ram}$ et $n \neq -1$, c'est-à-dire sélectionné par les contraintes de* *résidus*

$$W_{\mathrm{Airy}} = \mathbb{C}^{\mathrm{Ram}} \otimes \left\{ \eta \in \mathbb{C}((z))\, dz \mid \operatorname*{Res}_{0} \eta = 0 \right\}. \tag{21}$$

Il admet la décomposition de Tate

$$W_{\mathrm{Airy}} = z^{-1}\mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}[z^{-1}]\, dz \oplus \mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}[[z]]\, dz =: W_- \oplus W_+, \tag{22}$$

où $W_+ = W_-^\vee$*. Il s'agit d'une décomposition lagrangienne.*

Lemme 29. [*KS, Lemme 3.5.1*] *Les choix de lagrangiens* V *complémentaires à* W_+ *dans* W_{Airy} *sont en correspondance biunivoque avec les noyaux de Bergmann formels.*

Idée de la preuve. Dans le domaine $0 \ll |z'| \ll |z| \ll 1$, le noyau de Bergmann admet une expansion $\omega_{0,2}(z,z')_{|z'|\ll|z|} \in \mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}\widehat{\otimes}\mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}((z))((z'))\, dz\, dz'$, qui s'écrit explicitement

$$\omega_{0,2}(z,z')_{|z'|\ll|z|} = \sum_{a\in\mathrm{Ram}} a\otimes a \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2z'}{z^3} + \frac{3(z')^2}{z^4} + \dots \right) dz\, dz' + \sum_{\substack{a,b\\ n,m}} a\otimes b P^{a,b}_{n,m} z^{n-1}(z')^{m-1}\, dz\, dz'. \tag{23}$$

Alors on définit V comme le plus petit sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}((z))\, dz$ tel que $\omega_{0,2}(z,z')_{|z'|\ll|z|} \in V\widehat{\otimes}\mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}[[z']]\, dz'$.

Réciproquement, soit V un complémentaire lagrangien de W_+ dans W_{Airy}. On connaît déjà le lagrangien W_- tel que $W_{\mathrm{Airy}} = T^\vee W_-$, et V peut être vu comme le graphe de la différentielle d'une forme quadratique sur W_-, qui est donc un élément de la deuxième puissance symétrique complétée de $W_-^\vee = W_+$. Dans la base choisie de W_{Airy}, un noyau de Bergmann s'écrit $\omega_{0,2} = \omega_{0,2}^{\mathrm{diag}} + \omega_{0,2}^{\mathrm{reg}}$, où la partie encodant le pôle double à la diagonale est

$$\omega_{0,2}^{\mathrm{diag}}(z,z') = \sum_{a\in\mathrm{Ram}} (a\otimes a)\frac{dz\, dz'}{(z-z')^2} = \sum_{\substack{a\in\mathrm{Ram}\\ n\geq 1}} \Big(a\otimes n z^{-n-1}\, dz\Big)\otimes\Big(a\otimes (z')^{n-1}\, dz'\Big) \in W_-\widehat{\otimes}W_+ \tag{24}$$

et la partie régulière est

$$\omega_{0,2}^{\mathrm{reg}}(z,z') = \sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathrm{Ram}\\ n_1,n_2\geq 1}} P^{a_1,a_2}_{n_1,n_2} \Big(a_1\otimes z^{n_1-1}\, dz\Big)\otimes\Big(a_2\otimes (z')^{n_2-1}\, dz'\Big) \in \widehat{\mathrm{Sym}^2} W_+. \tag{25}$$

□

Remarque 30. Étant donné un noyau de Bergmann formel $(P^{a_1,a_2}_{n_1,n_2})$, on peut donner une base explicite du sous-espace V correspondant : il est engendré par les vecteurs e^a_n déterminés de façon unique par la condition que $e^a_n - a\otimes z^{-n-1}\, dz$ soit une forme holomorphe $\in \mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}[[z]]\, dz$, soit

$$e^a_n = a\otimes z^{-n-1}\, dz + \sum_{b,m\geq 1} \frac{1}{n} P^{a,b}_{n,m}\, b\otimes z^{m-1}\, dz. \tag{26}$$

Dans cette base, le noyau de Bergmann s'écrit

$$\omega_{0,2}(z,z') = \sum_{a,n\geq 1} e_n^a \otimes (a \otimes n(z')^{n-1}\, dz'). \tag{27}$$

Définition 31 (Sous-espace impair)**.** *Le noyau de récurrence* $K(z,\zeta)$ *est également une matrice de type* Ram $\times$ Ram, *mais ses coefficients sont dans* $\mathbb{C}((z))((\zeta))\frac{dz}{d\zeta}$. *Son expansion dans le régime* $|z| \ll |\zeta|$ *est*

$$K(z,\zeta)_{|z|\ll|\zeta|} = \sum_a a\otimes a\cdot\frac{-1}{4}\cdot\left(\frac{\zeta^{-1}}{z^2}+\frac{\zeta}{z^4}+\frac{\zeta^3}{z^6}+\dots\right)\frac{dz}{d\zeta}+\sum_{a,b} a\otimes b \sum_{\substack{n,m\geq 1\\ m \textit{ impair}}} \frac{-1}{4m} P_{n,m}^{a,b} z^n \zeta^{m-2}\frac{dz}{d\zeta}. \tag{28}$$

On définit alors V_{impair} *comme le plus petit sous-espace de* V *tel que* $K(z,\zeta)_{|z|\ll|\zeta|} \in V_{\text{impair}}((\zeta))\frac{1}{d\zeta^{-1}}$.

Remarque 32.

1. L'espace V_{impair} est engendré par les e_n^a avec n impair. Plus précisément, l'expansion de $K(z,\zeta)_{|z|\ll|\zeta|}$ induit sur l'expression de K dans la base choisie de V la condition de parité

$$K(z,\zeta) = \frac{-1}{4}\sum_{a,n\geq 1 \text{ impair}} e_n^a \otimes \left(a \otimes \frac{\zeta^{n-2}}{d\zeta}\right). \tag{29}$$

2. L'espace V_{impair} admet également une caractérisation intrinsèque comme le sous-espace de V consistant des formes dont les images directes sur le quotient de la courbe spectrale locale par les involutions (*i.e.* localement selon $z \mapsto x(z) = z^2$) n'ont pas de pôle aux points de ramification. On peut également imposer cette condition aux formes plus générales de W pour définir les sous-espace W_{impair} topologiquement engendré par les $a \otimes z^{n-1}\, dz$ avec $n \geq 1$ quelconque et $n \leq -1$ impair. On a bien sûr $V_{\text{impair}} = V \cap W_{\text{impair}}$, mais aussi $W_+ \subset W_{\text{impair}}$.

3.2 Comparaison des tenseurs

Construction 33 (Pré-structure d'Airy associée aux invariants RT). Les invariants $\omega_{g,n}$ apparaissant comme premières données de la récurrence topologiquepeuvent être interprétés comme une pré-structure d'Airy sur l'espace des formes méromorphes grâce aux formules exprimant $\omega_{0,2}$ et K. Plus précisément, on comme « données initiales »

$$A_{\text{RT}} = \omega_{0,3}(z_1,z_2,z_3) = 2\sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta\to a} K(z_1,\zeta)\omega_{0,2}(\zeta,z_2)\omega_{0,2}(\sigma_a(\zeta),z_3) \in V_{\text{impair}}\otimes V\otimes V \tag{30}$$

et

$$D_{\text{RT}} = \omega_{1,1}(z_1) = \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta\to a} K(z_1,\zeta)\omega_{0,2}(\zeta,\sigma_a(\zeta)) \in V_{\text{impair}}, \tag{31}$$

et en décomposant les termes apparaissant dans les sommes de la formule de récurrence topologique

$$B_{\text{RT}}(z_1,z_2)\colon W_{\text{Airy}} \ni f(z)\,dz \mapsto \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta\to a} K(z_1,\zeta)\omega_{0,2}(\sigma_a(\zeta),z_2)f(\zeta)\,d\zeta \in V_{\text{impair}}\otimes V \tag{32}$$

et

$$C_{\mathrm{RT}}(z_1)\colon W\otimes W \ni f(z)\,dz\otimes g(z')\,dz' \mapsto \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta\to a} K(z_1,\zeta)f(\zeta)g(\sigma_a(\zeta))\,d\zeta\,d(\sigma_a(\zeta)) \in V_{\mathrm{impair}}. \tag{33}$$

En restreignant de W à V, on obtient bien une pré-structure d'Airy $\left(A^{(V)}_{\mathrm{RT}}, B^{(V)}_{\mathrm{RT}}, C^{(V)}_{\mathrm{RT}}, D^{(V)}_{\mathrm{RT}}\right)$ sur V.

Dans la base choisie de V, on a les formules explicites

[KS, Lemme 3.5.2]

$$A^{(V)}_{\mathrm{RT}} = \frac{1}{4}\sum_a e^a_1\otimes e^a_1\otimes e^a_1, \tag{34}$$

[KS, Lemme 3.5.3]

$$B^{(V)}_{\mathrm{RT}}(e^a_n) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{n_{1,2}\geq 1\\ n_1+n_2=n+3\\ n_1 \mathit{impair}}} (-1)^{n_2+1} n_2 e^a_{n_1}\otimes e^a_{n_2} + \frac{1}{4}\sum_\alpha P^{\alpha,a}_{1,n} e^\alpha_1\otimes e^a_1, \tag{35}$$

[KS, Lemme 3.5.4]

$$\begin{aligned}
&4C^{(V)}_{\mathrm{RT}}(e^{a_1}_{n_1}\otimes e^{a_2}_{n_2})\\
=&\delta_{a_1,a_2}\chi_{n_1+n_2,2\mathbb{N}}(-1)^{n_2+1}e^{a_1}_{n_1+n_2+3} + \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ 2+\ell-n_1\in 2\mathbb{N}}} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} P^{a_1,a_2}_{\ell,n_2} e^{a_1}_{3+n_1-\ell}\\
&+ \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ 2+\ell-n_2\in 2\mathbb{N}}} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} P^{a_2,a_1}_{\ell,n_1} e^{a_1}_{3+n_1-\ell} + \sum_\alpha P^{\alpha,a_1}_{1,n_1} P^{\alpha,a_2}_{1,n_2} e^\alpha_1,
\end{aligned} \tag{36}$$

[KS, Lemme 3.5.5]

$$D^{(V)}_{\mathrm{RT}} = \sum_a \left(\frac{P^{a,a}_{1,1}e^a_1}{4} + \frac{e^a_3}{16}\right). \tag{37}$$

Rappel 34 (Action du groupe de jauge). L'espace W_+ est un sous-espace lagrangien de l'espace vectoriel symplectique W_{Airy}, et l'on rappelle (*cf.* l'exposé d'Étienne) que tout choix de complémentaire lagrangien V (qui est en particulier isomorphe à W_{Airy}/W_+) porte naturellement une structure d'Airy classique. Pour tout autre choix de complément lagrangien, la composition des isomorphismes avec le quotient identifie les deux espaces par un simple changement de coordonnées symplectique donné par une matrice symétrique, et induit une transformation de jauge entre les deux structures d'Airy. Si les structures d'Airy sont quantifiées, la transformation de jauge s'étend au dernier tenseur.

Les formules donnant les transformations de jauge sont aussi valables pour des pré-structures d'Airy. Dans notre cas, le choix d'un complémentaire lagrangien de W_+ correspond au choix de la partie régulière du noyau de Bergmann, qui est exactement la matrice symétrique $P^{a_1;a_2}_{n_1,n_2}$ (qui respecte bien une condition de symétrie) intervenant dans la transformation de jauge.

Un complémentaire lagrangien « canonique » de W_+ est W_-, qui correspond à identifier les voisinages des points de ramification à des copies de voisinages de 0 dans la courbe d'Airy sans ajouter de correction globale à $\omega_{0,2}$. Ainsi, la pré-structure d'Airy quantique $(A^{(W_-)}_{RT}, B^{(W_-)}_{RT}, C^{(W_-)}_{RT}, D^{(W_-)}_{RT})$ qui lui correspond est la somme directe des pré-structures associées de manière explicite à la courbe d'Airy.

Propostion 35. [*KS, Théorème 3.5.6*] *La pré-structure d'Airy* $(A^{(V)}_{RT}, B^{(V)}_{RT}, C^{(V)}_{RT}, D^{(V)}_{RT})$ *coïncide avec la transformée de jauge de* $(A^{(W_-)}_{RT}, B^{(W_-)}_{RT}, C^{(W_-)}_{RT}, D^{(W_-)}_{RT})$.

Démonstration. Évident en regardant les formules. □

Théorème 36. [*KS, Corollaire 3.5.7*] *Le sous-espace* V_{impair} *définit une sous-structure d'Airy primitive de* $(A^{(V)}_{RT}, B^{(V)}_{RT}, C^{(V)}_{RT}, D^{(V)}_{RT})$.

Démonstration. Cela vient du fait que $W_{-,\mathrm{impair}}$ est une sous-structure d'Airy primitve de la pré-structure d'Airy $(A^{(W_-)}_{RT}, B^{(W_-)}_{RT}, C^{(W_-)}_{RT}, D^{(W_-)}_{RT})$. □

Remarque 37 (Correspondance avec les notations de[ABCO, Sous-section 9.1]). L'espace de lacets d'algèbre de Frobenius $\mathbb{C}^{\mathrm{Ram}}[[z]]$ et sa base $(\xi_{n,a})_{n\geq 0, a\in \mathrm{Ram}}$ est identifiée à V_{impair} par $e^a_{2n+1} \mapsto \xi_{n,a}$. Comme l'on a identifié les voisinages des points de ramifications à des versions locales de la courbe d'Airy, avec $\omega_{0,1}(z) - \omega_{0,1}(-z) = 4z^2\, dz$, la décomposition de $\theta_a(z) = \frac{-2}{\omega_{0,1}(z)-\omega_{0,1}(-z)} = \sum_{m\geq -1} t_{m,a} z^{2m} (dz)^{-1}$ a seulement $t_{0,-1} = -\frac{1}{2}$ non nul.

Par propriété des invariants, on peut les décomposer sur la base de formes méromorphes en $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_n \\ k_1,\dots,k_n}} W_{g,n} \binom{a_1 \cdots a_n}{k_1 \cdots k_n} \prod_{i=1}^n \xi_{k_i,a_i}(z_i)$. La récurrence topologique pour les $\omega_{g,n}$ donne une récurrence pour les coefficients $W_{g,n} \binom{a_1 \cdots a_n}{k_1 \cdots k_n}$ qui utilise les tenseurs $A_{RT}, B_{RT}, C_{RT}, D_{RT}$. Plus précisément, on a des égalités $[A_{RT}]_{(k_1,a_1),(k_2,a_2),(k_3,a_3)} = W_{0,3} \binom{a_1\, a_2\, a_3}{k_1\, k_2\, k_3}$ et $[D_{RT}]_{(k,a)} = W_{1,1} \binom{a}{k}$, ainsi que les relations

$$W^B_{g,n} \binom{a_1 \cdots a_n}{k_1 \cdots k_n} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{\alpha,\kappa} [B_{RT}]_{(k_1,a_1),(k_i,a_i),(\kappa,\alpha)} W^B_{g,n-1} \binom{\alpha\, a_2 \cdots \hat{a_i} \cdots a_n}{\kappa\, k_2 \cdots \hat{k_i} \cdots k_n} \tag{38}$$

et de même pour $W^C_{g,n}$, où $W^B_{g,n}$ et $W^C_{g,n}$ sont les composantes des parties $\omega^B_{g,n}$ et $\omega^C_{g,n}$ correspondant respectivement aux termes de la somme dont le premier facteur est un $\omega_{0,2}$ (et donc le second un $\omega_{g,n-1}$) et aux autres. On obtient ainsi que les composantes $W_{g,n} \binom{a_1 \cdots a_n}{k_1 \cdots k_n}$ satisfont la même récurrence que les coefficients $S_{g,n}$ de la fonction d'onde associée à la structure d'Airy, et ont les mêmes données de départ, soit :

Lemme 38. [*ABCO, Proposition 9.2*] *Si* $2g - 2 + n > 0$, *on a*

$$W_{g,n} \binom{a_1 \cdots a_n}{k_1 \cdots k_n} = S_{g,n;(k_1,a_1),\dots,(k_n,a_n)}. \tag{39}$$

Rappel 39 (Structure d'Airy par contraintes de résidus). Sur l'espace $W^{(1)}_{\text{Airy}} = \{\eta \in \mathbb{C}((z)) \mid \text{Res}_0\,\eta = 0\}$ correspondant à la courbe d'Airy (avec un unique point de ramification), contenant le lagrangien $V^{(1)} = z^{-2}\mathbb{C}[z^{-1}]\,dz$ engendré par la base $(e_n = z^{-n-1}\,dz)$, on peut imposer des contraintes de résidus définissant un (germe de) lagrangien quadratique, dont l'espace tangent est isomorphe à $V^{\vee}$. Cela définit donc une structure d'Airy classique et quantifiable sur V, donnée dans la base par

$$A^{(1)} = \frac{1}{4} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, \tag{40}$$

$$B^{(1)} \colon e_n \mapsto \frac{1}{4} \sum_{\substack{n_1+n_2=n+3 \\ n_1 \text{impair}}} n_2 e_{n_1} \otimes e_{n_2}, \tag{41}$$

$$C^{(1)} \colon e_{n_1} \otimes e_{n_2} \mapsto \chi_{n_1+n_2, 2\mathbb{N}} \frac{1}{4} e_{n_1+n_2+3}, \tag{42}$$

$$D^{(1)} = \frac{1}{16} e_3. \tag{43}$$

Remarque 40. En exprimant le noyau de Bergmann et le noyau de récurrence de la courbe d'Airy dans la base (e_n), on obtient les formules

$$B^{(1)}(z_1, z_2) \colon f(z)\,dz \mapsto -\operatorname*{Res}_{\zeta \to 0} K(z_1, \zeta)\omega_{0,2}(\zeta, z_2) f(\zeta)\,d\zeta \tag{44}$$

et

$$C^{(1)}(z_1) \colon f(z)\,dz \otimes g(z)\,dz \mapsto -\operatorname*{Res}_{\zeta \to 0} K(z_1, \zeta) f(\zeta) g(\zeta)\,d\zeta\,d\zeta. \tag{45}$$

Définition 41 (Récurrence topologique modifiée)**.** *En s'inspirant des formules ci-dessus, on peut utiliser les tenseurs* (A, B, C, D) *d'une structure d'Airy quantique sur* W_{Airy} *pour définir des invariants par une récurrence topologique modifiée. Les données initiales sont*

$$\omega_{0,3}(z_1, z_2, z_3) = 2A(z_1, z_2, z_3) = \frac{dz_1\,dz_2\,dz_3}{2z_1^2 z_2^2 z_3^2} \quad \textit{et} \quad \omega_{1,1}(z_1) = D(z_1) = \frac{dz_1}{16 z_1^4}, \tag{46}$$

et pour $n > 0$ *et* $2g - 2 + n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \coloneqq &- \sum_a \operatorname*{Res}_{\zeta \to a} K(z_1, \zeta)\omega_{g-1,n+1}(\zeta, \zeta, z_2, \dots, z_n) \\ &- \sum_a \sideset{}{'}\sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I_1 \amalg I_2 = \{2,\dots,n\}}} \operatorname*{Res}_{\zeta \to a} K(z_1, \zeta)\omega_{g_1, 1+|I_1|}(\zeta, z_{I_1})\omega_{g_2, |I_2|}(\zeta, z_{I_2}). \end{aligned} \tag{47}$$

La récurrence topologique modifiée diffère de la récurrence topologique classique (*EO*) *par le facteur de signe global et l'absence de l'involution locale, et par le fait que* $\omega_{0,3}$ *et* $\omega_{1,1}$ *sont des données initiales et non des produits de la récurrence.*

Corollaire 42. [*KS, Théorème 3.5.8*] *Soit* $(A^{(W_-)}, B^{(W_-)}, C^{(W_-)}, D^{(W_-)})$ *la structure d'Airy quantique sur* W_- *définie comme la somme directe de* Ram *copies des structures de contraintes de résidus. Soit* $(A^{(V)}, B^{(V)}, C^{(V)}, D^{(V)})$ *la pré-structure d'Airy quantique sur* V *définie par la récurrence topologique modifiée à l'aide du noyau de Bergmann correspondant à* V*. Alors la pré-structure* $(A^{(V)}, B^{(V)}, C^{(V)}, D^{(V)})$

— *est la transformée de jauge de* $(A^{(W_-)}, B^{(W_-)}, C^{(W_-)}, D^{(W_-)})$ *par* $\omega_{0,2}$*,*
— *admet pour sous-structure primitive* V_{impair}*, et*
— *coïncide sur* V_{impair} *avec la structure* $(A^{(V)}_{\mathrm{RT}}, B^{(V)}_{\mathrm{RT}}, C^{(V)}_{\mathrm{RT}}, D^{(V)}_{\mathrm{RT}})$. □

Références

[ABCO] Jorgen Ellegaard Andersen, Gaëtan Borot, Leonid O. Chekhov, Nicolas Orantin, *The ABCD of topological recursion*, 2017.

[BE-ψ] Vincent Bouchard, Bertrand Eynard, *Reconstructing WKB from topological recursion*, 2017.

[EO-ωRT] Bertrand Eynard, Nicolas Orantin, *Invariants of algebraic curves and topological expansion*, 2007

[Eyn-Λ] Bertrand Eynard, *Invariants of spectral curves and intersection theory of moduli spaces of complex curves*, 2011.

[Eyn-τ] Bertrand Eynard, *The Geometry of integrable systems. Tau functions and homology of Spectral curves. Perturbative definition*, 2018.

[KS] Maxim Kontsevich, Yan Soibelman, *Airy structures and symplectic geometry of topological recursion*, 2017.