Cohomologie dans les catégories dérivées

Séminaire de **Co**homologie **Vi**rtuellement **D**écalé

David Kern

Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques

Première partie :
Des catégories dérivées des catégories abéliennes

Section 1: Localisation de catégories

Localisation d'une catégorie relative

Définitions

1. Une **catégorie relative** $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ est une catégorie $\mathfrak{C}$ et une classe $\mathscr{W}$ de morphismes de $\mathfrak{C}$ contenant tous les isomorphismes. Les éléments de $\mathscr{W}$ sont appelés les **équivalences faibles**, et sont notés $\xrightarrow{\sim}$.
   Un **foncteur relatif** est un foncteur préservant les équivalences faibles.

Localisation d'une catégorie relative

Définitions

1. Une **catégorie relative** $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ est une catégorie $\mathfrak{C}$ et une classe $\mathscr{W}$ de morphismes de $\mathfrak{C}$ contenant tous les isomorphismes. Les éléments de $\mathscr{W}$ sont appelés les **équivalences faibles**, et sont notés $\xrightarrow{\sim}$.
   Un **foncteur relatif** est un foncteur préservant les équivalences faibles.
2. Une **localisation** de $\mathfrak{C}$ le long de $\mathfrak{W}$ est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ et d'un foncteur $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ « inversant de manière universelle les morphismes de $\mathscr{W}$ »

Localisation d'une catégorie relative

Définitions

1. Une **catégorie relative** $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ est une catégorie $\mathfrak{C}$ et une classe $\mathscr{W}$ de morphismes de $\mathfrak{C}$ contenant tous les isomorphismes. Les éléments de $\mathscr{W}$ sont appelés les **équivalences faibles**, et sont notés $\xrightarrow{\sim}$.
   Un **foncteur relatif** est un foncteur préservant les équivalences faibles.
2. Une **localisation** de $\mathfrak{C}$ le long de $\mathfrak{W}$ est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ et d'un foncteur $\mathscr{L} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ « inversant de manière universelle les morphismes de $\mathscr{W}$ »

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[rr, "\mathscr{G}"] \arrow[dr, "\mathscr{L}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\exists! \Downarrow \simeq"] & \forall \mathfrak{D} \\ & \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}] \arrow[ur, "\exists \mathscr{F}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathscr{L}^* : \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}], \mathfrak{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Fonc}_{\mathscr{W} \to \sim}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$
Équivalence avec la catégorie des foncteurs $\mathscr{G}$ appliquant tout $w \in \mathscr{W}$ sur un iso.

Par sa prop. univ., la localisation est unique à équivalence essentiellement unique près.

Exemples I

- Soient k un anneau (commutatif) de base et A une k-algèbre (commutative). On peut voir A comme une catégorie $\mathscr{B}A$ enrichie dans $(\mathfrak{Mod}_k, \otimes_k)$ à un seul objet. Pour tout système multiplicatif $S \subset A$, vu comme une sous-catégorie de $\mathscr{B}A$, la localisation de $\mathscr{B}A$ le long de S est $\mathscr{B}(A[S^{-1}])$.

Exemples I

- Soient k un anneau (commutatif) de base et A une k-algèbre (commutative). On peut voir A comme une catégorie $\mathscr{B}A$ enrichie dans $(\mathfrak{Mod}_k, \otimes_k)$ à un seul objet. Pour tout système multiplicatif $S \subset A$, vu comme une sous-catégorie de $\mathscr{B}A$, la localisation de $\mathscr{B}A$ le long de S est $\mathscr{B}(A[S^{-1}])$.
- Notons $\mathbb{2} \coloneqq (0 \xrightarrow{!} 1)$ (la flèche universelle), et prenons $\mathscr{W}_0 = \{!\}$. Alors $\mathbb{2}[\mathscr{W}_0^{-1}]$ est l'isomorphisme universel $(0 \rightleftarrows 1)$.

Exemples I

- Soient k un anneau (commutatif) de base et A une k-algèbre (commutative). On peut voir A comme une catégorie $\mathscr{B}A$ enrichie dans $(\mathfrak{Mod}_k, \otimes_k)$ à un seul objet. Pour tout système multiplicatif $S \subset A$, vu comme une sous-catégorie de $\mathscr{B}A$, la localisation de $\mathscr{B}A$ le long de S est $\mathscr{B}(A[S^{-1}])$.
- Notons $\mathbb{2} \coloneqq (0 \xrightarrow{!} 1)$ (la flèche universelle), et prenons $\mathscr{W}_0 = \{!\}$. Alors $\mathbb{2}[\mathscr{W}_0^{-1}]$ est l'isomorphisme universel $(0 \rightleftarrows 1)$.

Pour toute catégorie relative $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$, le carré à droite est cocartésien : $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ est obtenue en recollant des isomorphismes.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{f \in \mathscr{W}} \mathbb{2} \arrow[r, "\coprod_{f \in \mathscr{W}} \{f\}"] \arrow[d] & \mathfrak{C} \arrow[d, "\mathscr{L}"] \\
\coprod_{f \in \mathscr{W}} \mathbb{2}[\mathscr{W}_0^{-1}] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Exemples II

- Le foncteur d'inclusion $\mathfrak{Grpd} \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ admet un adjoint à droite, associant à une catégorie son sous-groupoïde maximal, mais aussi un adjoint à gauche donné par la localisation le long de toutes les flèches.

Exemples II

- Le foncteur d'inclusion $\mathfrak{Grpd} \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ admet un adjoint à droite, associant à une catégorie son sous-groupoïde maximal, mais aussi un adjoint à gauche donné par la localisation le long de toutes les flèches.
- La localisation de $\mathfrak{Cat}$ le long des équivalences de catégories est la décatégorification de la 2-catégorie $\mathfrak{CAT}$: les objets sont les catégories et les morphismes les classes d'isomorphie naturelle de foncteurs.

Exemples II

- Le foncteur d'inclusion $\mathfrak{Grpd} \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ admet un adjoint à droite, associant à une catégorie son sous-groupoïde maximal, mais aussi un adjoint à gauche donné par la localisation le long de toutes les flèches.
- La localisation de $\mathfrak{Cat}$ le long des équivalences de catégories est la décatégorification de la 2-catégorie $\mathfrak{CAT}$: les objets sont les catégories et les morphismes les classes d'isomorphie naturelle de foncteurs.

Interprétation

Une transformation naturelle $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ revient à un foncteur $\mathfrak{C} \times 2 \to \mathfrak{D}$ (ou $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{Fl}(\mathfrak{D})$) dont les restrictions à $\mathfrak{C} \times \{0\}$ et $\mathfrak{C} \times \{1\}$ sont $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. La catégorie 2 est un « objet intervalle » de $\mathfrak{Cat}$, et une transformation naturelle peut donc être vue comme une homotopie (dirigée).

Exemples II

- Le foncteur d'inclusion $\mathfrak{Grpd} \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ admet un adjoint à droite, associant à une catégorie son sous-groupoïde maximal, mais aussi un adjoint à gauche donné par la localisation le long de toutes les flèches.
- La localisation de $\mathfrak{Cat}$ le long des équivalences de catégories est la décatégorification de la 2-catégorie $\mathfrak{CAT}$: les objets sont les catégories et les morphismes les classes d'isomorphie naturelle de foncteurs.

Interprétation

Une transformation naturelle $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ revient à un foncteur $\mathfrak{C} \times \mathbb{2} \to \mathfrak{D}$ (ou $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}^{\mathbb{2}} = \mathfrak{Fl}(\mathfrak{D})$) dont les restrictions à $\mathfrak{C} \times \{0\}$ et $\mathfrak{C} \times \{1\}$ sont $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. La catégorie $\mathbb{2}$ est un « objet intervalle » de $\mathfrak{Cat}$, et une transformation naturelle peut donc être vue comme une homotopie (dirigée).
Une équivalence de catégories est par définition une paire de foncteurs antiparallèles $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ dont les composées $\mathscr{F}\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}\mathscr{F}$ sont homotopes aux identités, donc quotienter par la relation d'homotopie permet bien de rendre les équivalences inversibles.

Exemples III

- Soit (X, τ) un espace topologique. Un morphisme de préfaisceaux sur $\mathfrak{S} := \mathfrak{Ouv}_\tau(X)$ est appelé un **isomorphisme τ-local** s'il induit des isomorphismes sur toutes les tiges.
  La localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S})$ le long de cette classe des isomorphismes τ-locaux est $\mathfrak{Faisc}_\tau(\mathfrak{S})$: le foncteur de localisation est la faisceautisation.

Exemples III

- Soit (X, τ) un espace topologique. Un morphisme de préfaisceaux sur $\mathfrak{S} := \mathfrak{Ouv}_\tau(X)$ est appelé un **isomorphisme τ-local** s'il induit des isomorphismes sur toutes les tiges.
  La localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S})$ le long de cette classe des isomorphismes τ-locaux est $\mathfrak{Faisc}_\tau(\mathfrak{S})$: le foncteur de localisation est la faisceautisation.

Remarque : De même, la catégorie des τ-champs sur $\mathfrak{S}$ est la localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S}; \mathfrak{Cat})$ les long des équivalences τ-locales.

Exemples III

- Soit (X, τ) un espace topologique. Un morphisme de préfaisceaux sur $\mathfrak{S} \coloneqq \mathfrak{Ouv}_\tau(X)$ est appelé un **isomorphisme τ-local** s'il induit des isomorphismes sur toutes les tiges.
  La localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S})$ le long de cette classe des isomorphismes τ-locaux est $\mathfrak{Faisc}_\tau(\mathfrak{S})$: le foncteur de localisation est la faisceautisation.

Remarque : De même, la catégorie des τ-champs sur $\mathfrak{S}$ est la localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S}; \mathfrak{Cat})$ les long des équivalences τ-locales.

Digression sur les localisations réflexives

Une localisation $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{1}]$ est **réflexive** si $\mathscr{L}$ a un adjoint à droite pleinement fidèle $\mathscr{I} \colon \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}] \hookrightarrow \mathfrak{C}$. Dans ce cas l'image essentielle de $\mathscr{I}$ consiste en les objets $\mathscr{W}$-locaux, les C tels que $\hom(w, C)$ est un iso pour tout $w \in \mathscr{W}$.

Exemples III

- Soit (X, τ) un espace topologique. Un morphisme de préfaisceaux sur $\mathfrak{S} \coloneqq \mathfrak{Ouv}_\tau(X)$ est appelé un **isomorphisme τ-local** s'il induit des isomorphismes sur toutes les tiges.
  La localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S})$ le long de cette classe des isomorphismes τ-locaux est $\mathfrak{Faisc}_\tau(\mathfrak{S})$: le foncteur de localisation est la faisceautisation.

Remarque : De même, la catégorie des τ-champs sur $\mathfrak{S}$ est la localisation de $\mathfrak{PrFaisc}(\mathfrak{S}; \mathfrak{Cat})$ les long des équivalences τ-locales.

Digression sur les localisations réflexives

Une localisation $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{W}^1]$ est **réflexive** si $\mathscr{L}$ a un adjoint à droite pleinement fidèle $\mathscr{I} \colon \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}] \hookrightarrow \mathfrak{C}$. Dans ce cas l'image essentielle de $\mathscr{I}$ consiste en les objets $\mathscr{W}$-locaux, les C tels que $\hom(w, C)$ est un iso pour tout $w \in \mathscr{W}$.
Réciproquement, tout adjoint à gauche $\mathscr{L}$ d'un foncteur pleinement fidèle $\mathscr{I}$ est une localisation le long des f tels que $\hom(f, C)$ est un iso pour tout C dans l'image de $\mathscr{I}$.

Existence et construction générale

Proposition

Les localisations existent.

Esquisse de construction.

Les objets de $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ sont ceux de $\mathfrak{C}$. Un zigzag de X vers Y est

$$Z_0 = X \xleftarrow{\sim} Z_1 \to Z_2 \xleftarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} Z_{n-1} \to Z_n = Y.$$

On quotiente par la plus petite relation d'équivalence identifiant deux zigzags pouvant être reliés par un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont dans $\mathscr{W}$.

$\square$

Remarque

Une localisation d'une catégorie localement petite n'est pas forcément localement petite

Présentation avec un calcul de fractions I

Calculs de fractions

Une classe de morphismes $\mathscr{W}$ **admet un calcul de fractions à gauche** si

1. elle est stable par composition,
2. tout diagramme à gauche peut être complété en un carré commutatif à droite

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s\in\mathscr{W}"] \arrow[d, "f"'] & X' \\ Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "s\in\mathscr{W}"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "s'\in\mathscr{W}"'] & Y' \end{tikzcd} ,$$

3. si $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ est une paire parallèle et $S\colon W \to X$ est un morphisme de $\mathscr{W}$ tel que $fs = gs$, il existe $t\colon Y \to Z$ dans $\mathscr{W}$ tel que $tf = tg$.

$\mathscr{W}$ admet un calcul de fractions à droite si $\mathscr{W}^{\mathrm{op}}$ a un calcul de fractions à gauche dans $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$.

C'est une généralisation de la condition d'Ore pour les anneaux non-commutatifs.

Présentation avec un calcul de fractions II

Théorème (Gabriel–Zisman)

Si $\mathscr{W}$ admet un calcul de fractions à droite (resp. à gauche), tout morphisme de $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ peut être représenté par un zigzag de longueur 1 du type $X \xleftarrow{\sim} Z \longrightarrow Y$ (resp. $X \longrightarrow Z' \xleftarrow{\sim} Y$).

Lemme

Si $\mathscr{W}$ admet un calcul de fractions à droite (resp. gauche), $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{1}]$ préserve les limites (resp. colimites) finies.

Présentation avec un calcul de fractions II

Théorème (Gabriel–Zisman)

Si $\mathscr{W}$ admet un calcul de fractions à droite (resp. à gauche), tout morphisme de $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ peut être représenté par un zigzag de longueur 1 du type $X \xleftarrow{\sim} Z \to Y$ (resp. $X \to Z' \xleftarrow{\sim} Y$).

Lemme

Si $\mathscr{W}$ admet un calcul de fractions à droite (resp. gauche), $\mathscr{L} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{W}^{1}]$ préserve les limites (resp. colimites) finies.

Proposition

Supposons que $\mathscr{W}$ admet un calcul de fractions à droite, $\mathfrak{C}$ les petites colimites filtrantes, et pour tout $C \in \mathfrak{C}$, les colimites indexées par $\mathfrak{C}_{\mathscr{W}/C}$ peuvent être calculées en restreignant à des diagrammes indexés par une petite catégorie fixée.
Alors $\mathfrak{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ est localement petite.

Catégorie dérivée

Notre but est d'inverser la classe des quasi-isomorphismes dans la catégorie des complexes dans une catégorie abélienne. Nous allons voir que cette classe admet un calcul de fractions, et ce d'une façon qui respecte la structure algébrique.

Catégorie dérivée

Notre but est d'inverser la classe des quasi-isomorphismes dans la catégorie des complexes dans une catégorie abélienne. Nous allons voir que cette classe admet un calcul de fractions, et ce d'une façon qui respecte la structure algébrique.

Définition (Catégorie dérivée)

Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne. Prenons

- $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$ la catégorie des complexes dans $\mathfrak{A}$ et
- $\mathscr{W} =$ qis la classe des quasi-isomorphismes.

La catégorie dérivée de $\mathfrak{A}$ est la localisation $\mathscr{D}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})[\mathrm{qis}^{-1}]$.

Par simplicité d'écriture, nous travaillerons souvent avec $\mathfrak{A} = \mathfrak{Mod}_k$ pour k un anneau ; par le théorème de plongement de Freyd–Mitchell il n'y a aucune perte de généralité.

Section 2: Catégories triangulées

Sommaire - Section 2: Catégories triangulées

Cônes en topologie I

Cône d'une application continue $f\colon X \to Y$

- $\mathrm{cone}(X)$ est le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation identifiant $(x,0)$ et $(x',0)$;
- $\mathrm{cyl}(f)$ est le quotient de $X \times [0,1] \amalg Y$ par la relation identifiant $(x,1)$ et $f(x)$.

Cônes en topologie I

Cône d'une application continue $f\colon X \to Y$

- $\mathrm{cone}(X)$ est le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation identifiant $(x,0)$ et $(x',0)$;
- $\mathrm{cyl}(f)$ est le quotient de $X \times [0,1] \amalg Y$ par la relation identifiant $(x,1)$ et $f(x)$.

Le cône de f est obtenu en recollant ces deux opérations, c-à-d comme la somme amalgamée

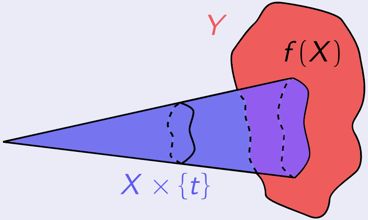
$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{cone}(X) \arrow[d] \\ \mathrm{cyl}(f) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & \mathrm{cone}(f) \simeq \frac{X \times [0,1] \amalg Y}{(x,0)\sim(x',0),(x,1)\sim f(x)} \end{tikzcd}.$$

Cônes en topologie I

Cône d'une application continue $f\colon X \to Y$

- $\mathrm{cone}(X)$ est le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation identifiant $(x,0)$ et $(x',0)$;
- $\mathrm{cyl}(f)$ est le quotient de $X \times [0,1] \amalg Y$ par la relation identifiant $(x,1)$ et $f(x)$.

Le cône de f est obtenu en recollant ces deux opérations, c-à-d comme la somme amalgamée



$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{cone}(X) \arrow[d] \\ \mathrm{cyl}(f) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \mathrm{cone}(f) \simeq \frac{X \times [0,1] \amalg Y}{(x,0) \sim (x',0),\,(x,1) \sim f(x)} \end{tikzcd}.$$

Ainsi tout cycle de Y dans l'image de f peut être « translaté » le long du cône à un cycle trivial, et vaudra donc 0 dans $\pi_\bullet(\mathrm{cone}(f))$. Le type d'homotopie de $\mathrm{cone}(f)$ se comporte donc comme si l'image de f avait été quotientée (contractée) dans Y : c'est « le » conoyau homotopique de f.

Cônes en topologie II

Plus précisément, en notant $i\colon Y \to \mathrm{cone}(f)$ l'application canonique, on a une homotopie entre $i \circ f$ et l'application $X \to \mathrm{cone}(f)$ constante à $\{0\}$.

Cônes en topologie II

Plus précisément, en notant $i\colon Y \to \mathrm{cone}(f)$ l'application canonique, on a une homotopie entre $i \circ f$ et l'application $X \to \mathrm{cone}(f)$ constante à $\{0\}$.
Si $((Z,0), j\colon Y \to Z)$ est un autre espace pointé muni d'une homotopie $\alpha\colon j \circ f \sim 0$ (*i.e.* $\alpha\colon X \times [0,1] \to Z$ avec $\alpha(x,0) = 0$ et $\alpha(x,1) = j(f(x))$), on construit un morphisme $a\colon \mathrm{cone}(f) \to Z$

Cônes en topologie II

Plus précisément, en notant $i\colon Y \to \mathrm{cone}(f)$ l'application canonique, on a une homotopie entre $i \circ f$ et l'application $X \to \mathrm{cone}(f)$ constante à $\{0\}$.
Si $((Z, 0), j\colon Y \to Z)$ est un autre espace pointé muni d'une homotopie $\alpha\colon j \circ f \sim 0$ (*i.e.* $\alpha\colon X \times [0, 1] \to Z$ avec $\alpha(x, 0) = 0$ et $\alpha(x, 1) = j(f(x))$), on construit un morphisme $a\colon \mathrm{cone}(f) \to Z$ en appliquant la classe $[(x, t)]$ sur $\alpha(x, t)$ et $[y]$ sur $j(y)$, de sorte que $j = a \circ i$.
Cependant la factorisation n'est pas tout à fait unique, mais seulement à homotopie près (en particulier l'on voit qu'elle dépend du choix de α).

Cônes en topologie II

Plus précisément, en notant $i\colon Y \to \mathrm{cone}(f)$ l'application canonique, on a une homotopie entre $i \circ f$ et l'application $X \to \mathrm{cone}(f)$ constante à $\{0\}$.
Si $((Z,0), j\colon Y \to Z)$ est un autre espace pointé muni d'une homotopie $\alpha\colon j \circ f \sim 0$ (*i.e.* $\alpha\colon X \times [0,1] \to Z$ avec $\alpha(x,0) = 0$ et $\alpha(x,1) = j(f(x))$), on construit un morphisme $a\colon \mathrm{cone}(f) \to Z$ en appliquant la classe $[(x,t)]$ sur $\alpha(x,t)$ et $[y]$ sur $j(y)$, de sorte que $j = a \circ i$.
Cependant la factorisation n'est pas tout à fait unique, mais seulement à homotopie près (en particulier l'on voit qu'elle dépend du choix de α).

Suspensions

Si $Y = *$ est un point, et $f = 0$ l'unique morphisme, alors $\mathrm{cone}(0)$ est la suspension ΣX de X. Remarquons que, pour Y et f quelconques, on a toujours un morphisme (le quotient) $q\colon \mathrm{cone}(f) \to \Sigma X$, et $q \circ i$ est égal à l'application constante $1\colon Y \to \Sigma X$.

$\rightsquigarrow$ « Suite exacte à homotopie près » $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} \mathrm{cone}(f) \xrightarrow{q} \Sigma X$

Construction du cône dans les complexes I

Nous allons maintenant travailler dans la catégorie des $\Bbbk$-modules différentiels gradués.

Cylindre d'un complexe

Le complexe **intervalle** est $I^\bullet = (\cdots \to 0 \to \Bbbk \xrightarrow{(-\mathrm{id}_\Bbbk, \mathrm{id}_\Bbbk)} \Bbbk \oplus \Bbbk)$ (il est concentré en degrés $[-1, 0]$).

Pour tout complexe $X^\bullet$, son **objet cylindre** est $\mathrm{cyl}(X)^\bullet \coloneqq X^\bullet \otimes I^\bullet$.

Construction du cône dans les complexes I

Nous allons maintenant travailler dans la catégorie des $\Bbbk$-modules différentiels gradués.

Cylindre d'un complexe

Le complexe **intervalle** est $I^\bullet = (\cdots \to 0 \to \Bbbk \xrightarrow{(-\mathrm{id}_\Bbbk, \mathrm{id}_\Bbbk)} \Bbbk \oplus \Bbbk)$ (il est concentré en degrés $[-1, 0]$).

Pour tout complexe $X^\bullet$, son **objet cylindre** est $\mathrm{cyl}(X)^\bullet \coloneqq X^\bullet \otimes I^\bullet$. Sa composante de degré n est donc $\mathrm{cyl}(X)^n = X^n \oplus X^n \oplus X^{n+1}$avec la différentielle

$$\begin{pmatrix} d_X^{n-1} \oplus d_X^{n-1} & (-\mathrm{id}_{X_n}, \mathrm{id}_{X_n}) \\ 0 & -d_X^n \end{pmatrix} : (X^{n-1} \oplus X^{n-1}) \oplus X^n \to (X^n \oplus X^n) \oplus X^{n+1},$$

et on déduit deux morphismes de complexes $i_0, i_1 : X^\bullet \to \mathrm{cyl}(X)$.

Construction du cône dans les complexes I

Nous allons maintenant travailler dans la catégorie des $\Bbbk$-modules différentiels gradués.

Cylindre d'un complexe

Le complexe **intervalle** est $I^\bullet = (\cdots \to 0 \to \Bbbk \xrightarrow{(-\mathrm{id}_\Bbbk, \mathrm{id}_\Bbbk)} \Bbbk \oplus \Bbbk)$ (il est concentré en degrés $[-1, 0]$).
Pour tout complexe $X^\bullet$, son **objet cylindre** est $\mathrm{cyl}(X)^\bullet := X^\bullet \otimes I^\bullet$. Sa composante de degré n est donc $\mathrm{cyl}(X)^n = X^n \oplus X^n \oplus X^{n+1}$avec la différentielle

$$\begin{pmatrix} d_X^{n-1} \oplus d_X^{n-1} & (-\mathrm{id}_{X_n}, \mathrm{id}_{X_n}) \\ 0 & -d_X^n \end{pmatrix} : (X^{n-1} \oplus X^{n-1}) \oplus X^n \to (X^n \oplus X^n) \oplus X^{n+1},$$

et on déduit deux morphismes de complexes $i_0, i_1 : X^\bullet \to \mathrm{cyl}(X)$.

Un cocycle de $\hom^\bullet(\mathrm{cyl}(X)^\bullet, Y^\bullet)$ de degré 0 est donné par deux morphismes $X^\bullet \rightrightarrows Y^\bullet$ et une homotopie entre eux.

Construction du cône dans les complexes II

Cône d'un homomorphisme de complexes

Le cône d'un complexe $X^\bullet$ est la somme amalgamée $\operatorname{cone}(X^\bullet) \coloneqq \operatorname{cyl}(X)^\bullet \underset{i_0, X^\bullet, 0}{\amalg} 0$, le quotient de $\operatorname{cyl}(X)^\bullet$ par l'image de i_0.

Le cylindre d'un morphisme $f^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ est $\operatorname{cyl}(f^\bullet) = \operatorname{cyl}(X^\bullet) \underset{i_1, X^\bullet, f^\bullet}{\amalg} Y^\bullet$.

Construction du cône dans les complexes II

Cône d'un homomorphisme de complexes

Le cône d'un complexe $X^\bullet$ est la somme amalgamée $\operatorname{cone}(X^\bullet) \coloneqq \operatorname{cyl}(X)^\bullet \coprod_{i_0, X^\bullet, 0} 0$, le quotient de $\operatorname{cyl}(X)^\bullet$ par l'image de i_0.
Le cylindre d'un morphisme $f^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ est $\operatorname{cyl}(f^\bullet) = \operatorname{cyl}(X^\bullet) \coprod_{i_1, X^\bullet, f^\bullet} Y^\bullet$.
Finalement, le **cône** de $f^\bullet$ est $\operatorname{cone}(f^\bullet) = \operatorname{cone}(X^\bullet) \coprod_{\operatorname{cyl}(X^\bullet)} \operatorname{cyl}(f^\bullet)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{cone}(f)^\bullet & & \\
Y^\bullet \arrow[urr] & & \operatorname{cyl}(X)^\bullet & & 0 \arrow[ull] \\
 & X^\bullet \arrow[ul, "f^\bullet"] \arrow[ur, "i_1"'] & & X^\bullet \arrow[ul, "i_0"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Construction du cône dans les complexes II

Cône d'un homomorphisme de complexes

Le cône d'un complexe $X^\bullet$ est la somme amalgamée $\mathrm{cone}(X^\bullet) \coloneqq \mathrm{cyl}(X)^\bullet \coprod_{i_0, X^\bullet, 0} 0$, le quotient de $\mathrm{cyl}(X)^\bullet$ par l'image de i_0.

Le cylindre d'un morphisme $f^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ est $\mathrm{cyl}(f^\bullet) = \mathrm{cyl}(X^\bullet) \coprod_{i_1, X^\bullet, f^\bullet} Y^\bullet$.

Finalement, le **cône** de $f^\bullet$ est $\mathrm{cone}(f^\bullet) = \mathrm{cone}(X^\bullet) \coprod_{\mathrm{cyl}(X^\bullet)} \mathrm{cyl}(f^\bullet)$.

Forme explicite

Les composantes et la différentielle de $\mathrm{cone}(f^\bullet)$ sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} d^Y_{n-1} & f_n \\ 0 & -d^X_n \end{pmatrix} : \mathrm{cone}(f)^{n-1} = Y^{n-1} \oplus X^n \to \mathrm{cone}(f)^n = Y^n \oplus X^{n+1}.$$

Construction du cône dans les complexes III

Remarquons que l'on obtient canoniquement

- des morphismes $i_f^\bullet \colon Y^\bullet \longrightarrow \operatorname{cone}(f)^\bullet$ et $p_f^\bullet \colon \operatorname{cone}(f)^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$, avec $p_f^\bullet \circ i_f^\bullet = 0$,
- des applications $\vartheta^n \colon X^{n+1} \longrightarrow \operatorname{cone}(f)^n$ et $\upsilon^n \colon \operatorname{cone}(f)^{n+1} \longrightarrow (Y[1])^n = Y^{n+1}$.

Construction du cône dans les complexes III

Remarquons que l'on obtient canoniquement

- des morphismes $i_f^\bullet \colon Y^\bullet \to \mathrm{cone}(f)^\bullet$ et $p_f^\bullet \colon \mathrm{cone}(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$, avec $p_f^\bullet \circ i_f^\bullet = 0$,
- des applications $\vartheta^n \colon X^{n+1} \to \mathrm{cone}(f)^n$ et $\upsilon^n \colon \mathrm{cone}(f)^{n+1} \to (Y[1])^n = Y^{n+1}$.

Proposition

Les ϑ^n et υ^n donnent des homotopies de chaînes $\vartheta \colon i_f^\bullet \circ f^\bullet \overset{\sim}{\Rightarrow} 0$ et $\upsilon \colon f[1]^\bullet \circ p_f^\bullet \overset{\sim}{\Rightarrow} 0$, qui sont en outre universelles

Construction du cône dans les complexes III

Remarquons que l'on obtient canoniquement

- des morphismes $i_f^\bullet \colon Y^\bullet \to \operatorname{cone}(f)^\bullet$ et $p_f^\bullet \colon \operatorname{cone}(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$, avec $p_f^\bullet \circ i_f^\bullet = 0$,
- des applications $\vartheta^n \colon X^{n+1} \to \operatorname{cone}(f)^n$ et $\upsilon^n \colon \operatorname{cone}(f)^{n+1} \to (Y[1])^n = Y^{n+1}$.

Proposition

Les ϑ^n et υ^n donnent des homotopies de chaînes $\vartheta \colon i_f^\bullet \circ f^\bullet \overset{\sim}{\Rrightarrow} 0$ et $\upsilon \colon f[1]^\bullet \circ p_f^\bullet \overset{\sim}{\Rrightarrow} 0$, qui sont en outre universelles : pour tout $j^\bullet \colon Y^\bullet \to Z^\bullet$ muni d'une homotopie $\eta \colon j^\bullet \circ f^\bullet \overset{\sim}{\Rrightarrow} 0$, il existe un unique $t^\bullet \colon \operatorname{cone}(f)^\bullet \to Z^\bullet$ tel que $j^\bullet = t^\bullet \circ i_f^\bullet$ et $\eta = t^\bullet \vartheta$, et de même pour υ.

Construction du cône dans les complexes III

Remarquons que l'on obtient canoniquement

- des morphismes $i_f^\bullet\colon Y^\bullet \to \mathrm{cone}(f)^\bullet$ et $p_f^\bullet\colon \mathrm{cone}(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$, avec $p_f^\bullet \circ i_f^\bullet = 0$,
- des applications $\vartheta^n\colon X^{n+1} \to \mathrm{cone}(f)^n$ et $\upsilon^n\colon \mathrm{cone}(f)^{n+1} \to (Y[1])^n = Y^{n+1}$.

Proposition

Les ϑ^n et υ^n donnent des homotopies de chaînes $\vartheta\colon i_f^\bullet \circ f^\bullet \overset{\sim}{\Rightarrow} 0$ et $\upsilon\colon f[1]^\bullet \circ p_f^\bullet \overset{\sim}{\Rightarrow} 0$, qui sont en outre universelles : pour tout $j^\bullet\colon Y^\bullet \to Z^\bullet$ muni d'une homotopie $\eta\colon j^\bullet \circ f^\bullet \overset{\sim}{\Rightarrow} 0$, il existe un unique $t^\bullet\colon \mathrm{cone}(f)^\bullet \to Z^\bullet$ tel que $j^\bullet = t^\bullet \circ i_f^\bullet$ et $\eta = t^\bullet\vartheta$, et de même pour υ.

Interprétation

La prop. univ. pour ϑ dit que $i_f^\bullet\colon Y^\bullet \to \mathrm{cone}(f)^\bullet$ est un *conoyau homotopique* de $f^\bullet$.
Celle pour υ dit que $p_f^\bullet\colon \mathrm{cone}(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ est un *noyau homotopique* pour $f^\bullet[1]$.

Sommaire - Section 2: Catégories triangulées

La définition

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma \colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**

La définition

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**, vérifiant :

TR0 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $X \in \mathfrak{C}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**, vérifiant :

- TR0 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $X \in \mathfrak{C}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.
- TR1 Tout $X \xrightarrow{f} Y$ se complète en un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$.

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**, vérifiant :

- TR0 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $X \in \mathfrak{C}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.
- TR1 Tout $X \xrightarrow{f} Y$ se complète en un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$.
- TR2 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ est distingué ssi $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$ l'est.

La définition

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**, vérifiant :

- TR0 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $X \in \mathfrak{C}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.
- TR1 Tout $X \xrightarrow{f} Y$ se complète en un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$.
- TR2 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ est distingué ssi $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$ l'est.
- TR3 $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\exists c"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$: tout diagramme solide se complète

La définition

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**, vérifiant :

- TR0 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $X \in \mathfrak{C}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.
- TR1 Tout $X \xrightarrow{f} Y$ se complète en un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$.
- TR2 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ est distingué ssi $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$ l'est.
- TR3
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\exists c"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$
 : tout diagramme solide se complète

La définition

Définition : Catégorie triangulée

Une **catégorie prétriangulée** est une catégorie additive $\mathfrak{C}$ munie de $\Sigma\colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}$ et d'une classe de triangles $A \to B \to C \to \Sigma A$, dits **distingués**, vérifiant :

- TR0 Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet $X \in \mathfrak{C}$, le triangle $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.
- TR1 Tout $X \xrightarrow{f} Y$ se complète en un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$.
- TR2 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ est distingué ssi $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$ l'est.
- TR3 $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\exists c"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$: tout diagramme solide se complète

$\mathfrak{C}$ est **triangulée** si le cône du morphisme obtenu dans TR3 est un triangle distingué.

Remarques sur la définition

Terminologie

Le foncteur Σ est appelé le **décalage**, la **translation**, ou la **suspension**, et noté $A \mapsto A[1]$. On note aussi (pour $n \in \mathbb{N}$) $[n] = \Sigma^n$ ses puissances positives, et $[-n]$ les puissances positives de son quasi-inverse (la désuspension).

Remarques sur la définition

Terminologie

Le foncteur Σ est appelé le **décalage**, la **translation**, ou la **suspension**, et noté $A \mapsto A[1]$. On note aussi (pour $n \in \mathbb{N}$) $[n] = \Sigma^n$ ses puissances positives, et $[-n]$ les puissances positives de son quasi-inverse (la désuspension).

Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme, une complétion $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ est appelée un **cône** pour f.

Remarques sur la définition

Terminologie

Le foncteur Σ est appelé le **décalage**, la **translation**, ou la **suspension**, et noté $A \mapsto A[1]$. On note aussi (pour $n \in \mathbb{N}$) $[n] = \Sigma^n$ ses puissances positives, et $[-n]$ les puissances positives de son quasi-inverse (la désuspension).

Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme, une complétion $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ est appelée un **cône** pour f.

Remarque

Les axiomes définissant une catégorie triangulée sont redondants :

- Il n'est pas nécessaire de présupposer que les triangles sont des complexes, les axiomes des triangles distingués impliquent que toutes les composées sont nulles.
- Dans TR2 il suffit de supposer une direction, l'autre est alors automatique.

Exemple

Pour tous complexes de cochaînes $X, Y \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, la relation d'équivalence d'homotopie de chaînes est une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathfrak{Ch}(A)}(X, Y)$. On définit $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ d'objets ceux de $\mathfrak{Ch}(A)$ et morphismes $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(X, Y) = \hom_{\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})}(X, Y)/\sim$.

Exemple

Pour tous complexes de cochaînes $X, Y \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, la relation d'équivalence d'homotopie de chaînes est une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathfrak{Ch}(A)}(X, Y)$. On définit $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ d'objets ceux de $\mathfrak{Ch}(A)$ et morphismes $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(X, Y) = \hom_{\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})}(X, Y)/\sim$.
Il existe sur $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ une structure triangulée où le foncteur de translation est $[1]$, et les triangles distingués sont ceux isomorphes à des triangles de cônes

Exemple

Pour tous complexes de cochaînes $X, Y \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, la relation d'équivalence d'homotopie de chaînes est une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathfrak{Ch}(A)}(X,Y)$. On définit $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ d'objets ceux de $\mathfrak{Ch}(A)$ et morphismes $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(X,Y) = \hom_{\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})}(X,Y)/\sim$.
Il existe sur $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ une structure triangulée où le foncteur de translation est $[1]$, et les triangles distingués sont ceux isomorphes à des triangles de cônes : étant donné

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[a]}"'] & Y \arrow[r, "{[i_f]}"] \arrow[d, "{[b]}"] & \mathrm{cone}(f) \arrow[r, "{[p_f]}"] \arrow[d, dotted, "{\exists ?[c]}"] & \Sigma X \arrow[d, "{\Sigma[a]}"] \\
X' \arrow[r, "{[f']}"'] & Y' \arrow[r, "{[i_{f'}]}"'] & \mathrm{cone}(f') \arrow[r, "{[p_{f'}]}"'] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Exemple

Pour tous complexes de cochaînes $X, Y \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, la relation d'équivalence d'homotopie de chaînes est une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathfrak{Ch}(A)}(X, Y)$. On définit $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ d'objets ceux de $\mathfrak{Ch}(A)$ et morphismes $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(X, Y) = \hom_{\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})}(X, Y)/\sim$.
Il existe sur $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ une structure triangulée où le foncteur de translation est $[1]$, et les triangles distingués sont ceux isomorphes à des triangles de cônes : étant donné

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[a]}"'] & Y \arrow[r, "{[i_f]}"] \arrow[d, "{[b]}"] & \mathrm{cone}(f) \arrow[r, "{[p_f]}"] \arrow[d, dotted, "{\exists ?[c]}"] & \Sigma X \arrow[d, "{\Sigma[a]}"] \\
X' \arrow[r, "{[f']}"'] & Y' \arrow[r, "{[i_{f'}]}"'] & \mathrm{cone}(f') \arrow[r, "{[p_{f'}]}"'] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

on a $(i_{f'}b)f = i_{f'}f'a \sim 0a = 0$ donc la propriété universelle de $\mathrm{cone}(f)$ induit c.

Exemple

Pour tous complexes de cochaînes $X, Y \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, la relation d'équivalence d'homotopie de chaînes est une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathfrak{Ch}(A)}(X, Y)$. On définit $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ d'objets ceux de $\mathfrak{Ch}(A)$ et morphismes $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(X, Y) = \hom_{\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})}(X, Y)/\sim$.
Il existe sur $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ une structure triangulée où le foncteur de translation est $[1]$, et les triangles distingués sont ceux isomorphes à des triangles de cônes : étant donné

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[a]}"'] & Y \arrow[r, "{[i_f]}"] \arrow[d, "{[b]}"] & \mathrm{cone}(f) \arrow[r, "{[p_f]}"] \arrow[d, dotted, "{\exists ?[c]}"] & \Sigma X \arrow[d, "{\Sigma[a]}"] \\
X' \arrow[r, "{[f']}"'] & Y' \arrow[r, "{[i_{f'}]}"'] & \mathrm{cone}(f') \arrow[r, "{[p_{f'}]}"'] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

on a $(i_{f'} b) f = i_{f'} f' a \sim 0a = 0$ donc la propriété universelle de $\mathrm{cone}(f)$ induit c.

Les sous-catégories pleines $\mathfrak{K}^s(\mathfrak{A})$ pour $s \in \{+, -, \mathrm{b}\}$ sur les complexes bornés (pour $s = \mathrm{b}$), resp. inférieurement (si $s = +$), resp. supérieurement (si $s = -$), sont aussi triangulées.

Fonceteurs homologiques

Définition (Foncteurs homologiques)

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée. Un foncteur additif $\mathscr{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ab}$ est **homologique** si, pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to \Sigma X$, l'image $\mathscr{H}X \to \mathscr{H}Y \to \mathscr{H}Z$ est une suite exacte de groupes abéliens.

Si $\mathscr{H}$ est un foncteur homologique, on note $\mathscr{H}^n = \mathscr{H} \circ [n]$; ainsi tout triangle distingué induit une suite exacte longue $\cdots \to \mathscr{H}^{-1}Z \to \mathscr{H}^0 X \to \mathscr{H}^0 Y \to \mathscr{H}^0 Z \to \mathscr{H}^1 X \to \cdots$.

Foncteurs homologiques

Définition (Foncteurs homologiques)

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée. Un foncteur additif $\mathscr{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ab}$ est **homologique** si, pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to \Sigma X$, l'image $\mathscr{H} X \to \mathscr{H} Y \to \mathscr{H} Z$ est une suite exacte de groupes abéliens.
Si $\mathscr{H}$ est un foncteur homologique, on note $\mathscr{H}^n = \mathscr{H} \circ [n]$; ainsi tout triangle distingué induit une suite exacte longue $\cdots \to \mathscr{H}^{-1} Z \to \mathscr{H}^0 X \to \mathscr{H}^0 Y \to \mathscr{H}^0 Z \to \mathscr{H}^1 X \to \cdots$.

Pour tout $X \in \mathfrak{C}$, le foncteur $\hom(X, -)$ est homologique.

Foncteurs homologiques

Définition (Foncteurs homologiques)

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée. Un foncteur additif $\mathscr{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Ab}$ est **homologique** si, pour tout triangle distingué $X \to Y \to Z \to \Sigma X$, l'image $\mathscr{H}X \to \mathscr{H}Y \to \mathscr{H}Z$ est une suite exacte de groupes abéliens.
Si $\mathscr{H}$ est un foncteur homologique, on note $\mathscr{H}^n = \mathscr{H} \circ [n]$; ainsi tout triangle distingué induit une suite exacte longue $\cdots \to \mathscr{H}^{-1}Z \to \mathscr{H}^0X \to \mathscr{H}^0Y \to \mathscr{H}^0Z \to \mathscr{H}^1X \to \cdots$.

Pour tout $X \in \mathfrak{C}$, le foncteur $\hom(X, -)$ est homologique.

Corollaire

Un morphisme f est un isomorphisme ssi son image par tout foncteur homologique en est un.

Démonstration.

On utilise le lemme de Yoneda avec les foncteurs homologiques représentables. $\square$

Démonstration de $\hom(X, -)$ homologique

On doit montrer que, pour tout triangle distingué $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to \Sigma U$, la suite $\hom(X, U) \xrightarrow{f_*} \hom(X, V) \xrightarrow{g_*} \hom(X, W)$ est exacte (en $\hom(X, V)$).

Soit $\phi\colon X \to V$ tel que $g_*(\phi) = g\phi = 0\colon X \to W$. On cherche $\psi\colon X \to U$ tel que $\phi = f_*(\psi) = f\psi$.

Démonstration de $\hom(X, -)$ homologique

On doit montrer que, pour tout triangle distingué $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to \Sigma U$, la suite $\hom(X, U) \xrightarrow{f_*} \hom(X, V) \xrightarrow{g_*} \hom(X, W)$ est exacte (en $\hom(X, V)$).

Soit $\phi\colon X \to V$ tel que $g_*(\phi) = g\phi = 0\colon X \to W$. On cherche $\psi\colon X \to U$ tel que $\phi = f_*(\psi) = f\psi$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}X \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma^{-1}\phi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[d, "\phi"] \\
\Sigma^{-1}V \arrow[r, "\Sigma^{-1}g"'] & \Sigma^{-1}W \arrow[r] & U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

Le diagramme commute bien.

Démonstration de $\hom(X, -)$ homologique

On doit montrer que, pour tout triangle distingué $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to \Sigma U$, la suite $\hom(X, U) \xrightarrow{f_*} \hom(X, V) \xrightarrow{g_*} \hom(X, W)$ est exacte (en $\hom(X, V)$).

Soit $\phi \colon X \to V$ tel que $g_*(\phi) = g\phi = 0 \colon X \to W$. On cherche $\psi \colon X \to U$ tel que $\phi = f_*(\psi) = f\psi$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}X \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma^{-1}\phi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\psi"] & X \arrow[d, "\phi"] \\
\Sigma^{-1}V \arrow[r, "\Sigma^{-1}g"'] & \Sigma^{-1}W \arrow[r] & U \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

On a bien $f \circ \psi = \phi$. $\square$

Unicité des cônes I

Lemme des cinq triangulé

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

morphisme de triangles distingués. Si f et g sont inversibles, h l'est aussi.

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}(f)", "\simeq"'] & \mathscr{H}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}(g)", "\simeq"'] & \mathscr{H}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}(h)"] & \mathscr{H}(\Sigma X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}(\Sigma f)", "\simeq"'] & \mathscr{H}(\Sigma Y) \arrow[d, "\mathscr{H}(\Sigma g)", "\simeq"'] \\ \mathscr{H}(X') \arrow[r] & \mathscr{H}(Y') \arrow[r] & \mathscr{H}(Z') \arrow[r] & \mathscr{H}(\Sigma X') \arrow[r] & \mathscr{H}(\Sigma Y') \end{tikzcd}$$

□

Unicité des cônes II

Corollaire 1

Tous les cônes d'une flèche $f \colon X \to Y$ sont isomorphes.

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

□

Unicité des cônes II

Corollaire 1

Tous les cônes d'une flèche $f : X \to Y$ sont isomorphes.

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

$\square$

Remarque

L'isomorphisme entre deux cônes pour f n'est cependant pas unique, ce qui empêche la construction du cône d'être fonctorielle. On peut en fait montrer qu'une catégorie triangulée Karoubienne qui admet une des cônes fonctoriels est nécessairement abélienne.

Unicité des cônes II

Corollaire 1

Tous les cônes d'une flèche $f\colon X \to Y$ sont isomorphes.

Corollaire 2

Un morphisme $f\colon X \to Y$ est un isomorphisme si et seulement si le triangle $X \xrightarrow{f} Y \to 0 \to \Sigma X$ est distingué.

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

Localisations et systèmes nuls

Définition (Système nul)

$\mathfrak{C}$ catégorie triangulée. Un **système nul** de $\mathfrak{C}$ est une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}$ telle que :

- $\mathfrak{N}$ est saturée (stable par isomorphismes dans $\mathfrak{C}$) et contient l'objet 0,
- un objet X est dans $\mathfrak{N}$ si et seulement si son translaté $X[1]$ est dans $\mathfrak{N}$,
- si $X \to Y \to Z \to X[1]$ est un triangle distingué et $X, Z \in \mathfrak{N}$, alors $Y \in \mathfrak{N}$.

Exemple

Dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, on peut prendre pour $\mathfrak{N}$ les complexes acycliques (quasi-isomorphes à 0).

Localisations et systèmes nuls

Définition (Système nul)

$\mathfrak{C}$ catégorie triangulée. Un **système nul** de $\mathfrak{C}$ est une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}$ telle que :

- $\mathfrak{N}$ est saturée (stable par isomorphismes dans $\mathfrak{C}$) et contient l'objet 0,
- un objet X est dans $\mathfrak{N}$ si et seulement si son translaté $X[1]$ est dans $\mathfrak{N}$,
- si $X \to Y \to Z \to X[1]$ est un triangle distingué et $X, Z \in \mathfrak{N}$, alors $Y \in \mathfrak{N}$.

Exemple

Dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, on peut prendre pour $\mathfrak{N}$ les complexes acycliques (quasi-isomorphes à 0).

Proposition

Si $\mathfrak{N}$ est un système nul, l'ensemble des morphismes de $\mathfrak{C}$ dont le cône est dans $\mathfrak{N}$ admet des calculs de fractions à gauche et à droite.

On note $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ la localisation de $\mathfrak{C}$ le long de cette classe d'équivalences faibles.

Exemple des sous-catégories épaisses

Sous-catégories triangulées épaisses

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée. Une **sous-catégorie triangulée** est une sous-catégorie $i\colon \mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ pleine, stable par isomorphismes et coproduits finis, et munie d'une structure triangulée telle que i soit un foncteur triangulé.
Une sous-catégorie triangulée $\mathfrak{N}$ est **épaisse** si deux objets X, Y de $\mathfrak{C}$ sont dans $\mathfrak{N}$ dès que $X \oplus Y$ l'est.
Toute sous-catégorie triangulée définit un système nul.

Exemple des sous-catégories épaisses

Sous-catégories triangulées épaisses

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée. Une **sous-catégorie triangulée** est une sous-catégorie $i\colon \mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ pleine, stable par isomorphismes et coproduits finis, et munie d'une structure triangulée telle que i soit un foncteur triangulé.
Une sous-catégorie triangulée $\mathfrak{N}$ est **épaisse** si deux objets X, Y de $\mathfrak{C}$ sont dans $\mathfrak{N}$ dès que $X \oplus Y$ l'est.
Toute sous-catégorie triangulée définit un système nul.

Noyaux triangulés

Soit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un foncteur triangulé. Alors son noyau (la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}$ sur les C tels que $\mathscr{F}C \simeq 0$) est une sous-catégorie épaisse.
Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne et $\mathscr{H}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ un foncteur homologique. Alors son noyau (la sous-catégorie pleine sur les C tels que $\mathscr{H}^i C \simeq 0 \forall i$) est une sous-catégorie épaisse.

Propriété universelle de la localisation triangulée

Lemme

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée et soit $\mathfrak{N}$ une sous-catégorie triangulée de $\mathfrak{C}$. La localisation $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ admet une structure triangulée dont les triangles distingués sont ceux isomorphes aux images de triangles distingués par $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$.

Propriété universelle de la localisation triangulée

Lemme

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée et soit $\mathfrak{N}$ une sous-catégorie triangulée de $\mathfrak{C}$. La localisation $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ admet une structure triangulée dont les triangles distingués sont ceux isomorphes aux images de triangles distingués par $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$.

Théorème (Verdier)

1. Tout foncteur triangulé $\mathscr{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dont le noyau contient $\mathfrak{N}$ se factorise de façon unique le long de $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ par un foncteur triangulé $\mathfrak{C}/\mathfrak{N} \to \mathfrak{D}$.

Propriété universelle de la localisation triangulée

Lemme

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée et soit $\mathfrak{N}$ une sous-catégorie triangulée de $\mathfrak{C}$. La localisation $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ admet une structure triangulée dont les triangles distingués sont ceux isomorphes aux images de triangles distingués par $\mathscr{L} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$.

Théorème (Verdier)

1. Tout foncteur triangulé $\mathscr{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dont le noyau contient $\mathfrak{N}$ se factorise de façon unique le long de $\mathscr{L} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ par un foncteur triangulé $\mathfrak{C}/\mathfrak{N} \to \mathfrak{D}$.
2. Tout foncteur homologique $\mathscr{H} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ dont le noyau contient $\mathfrak{N}$ se factorise de façon unique le long de $\mathscr{L} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ par un foncteur homologique $\mathfrak{C}/\mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$.

Propriété universelle de la localisation triangulée

Lemme

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie triangulée et soit $\mathfrak{N}$ une sous-catégorie triangulée de $\mathfrak{C}$. La localisation $\mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ admet une structure triangulée dont les triangles distingués sont ceux isomorphes aux images de triangles distingués par $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$.

Théorème (Verdier)

1. Tout foncteur triangulé $\mathscr{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dont le noyau contient $\mathfrak{N}$ se factorise de façon unique le long de $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ par un foncteur triangulé $\mathfrak{C}/\mathfrak{N} \to \mathfrak{D}$.
2. Tout foncteur homologique $\mathscr{H}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ dont le noyau contient $\mathfrak{N}$ se factorise de façon unique le long de $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ par un foncteur homologique $\mathfrak{C}/\mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$.
3. Le noyau de $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{N}$ est la plus petite sous-catégorie triangulée épaisse de $\mathfrak{C}$ contenant $\mathfrak{N}$.

Catégorie dérivée par résolutions

Définition (Catégories dérivées bornées)

Pour $s \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, $\mathscr{D}^s(\mathfrak{A})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{D}(\mathfrak{A})$ sur les objets de cohomologie bornée (pour $s = \mathrm{b}$), resp. inférieurement si $s = +$, resp. supérieurement si $s = -$).

Proposition

Pour $s \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, le foncteur $\mathfrak{K}^s(\mathfrak{A}) \to \mathscr{D}^s(\mathfrak{A})$ induit une équivalence triangulée avec la localisation de $\mathfrak{K}^s(\mathfrak{A})$ le long des quasi-isomorphismes.

Catégorie dérivée par résolutions

Définition (Catégories dérivées bornées)

Pour $s \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, $\mathscr{D}^s(\mathfrak{A})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{D}(\mathfrak{A})$ sur les objets de cohomologie bornée (pour $s = \mathrm{b}$), resp. inférieurement si $s = +$, resp. supérieurement si $s = -$).

Proposition

Pour $s \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, le foncteur $\mathfrak{K}^s(\mathfrak{A}) \to \mathscr{D}^s(\mathfrak{A})$ induit une équivalence triangulée avec la localisation de $\mathfrak{K}^s(\mathfrak{A})$ le long des quasi-isomorphismes.

Théorème

Soit $\mathfrak{K}^+_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathfrak{K}^-_{\mathrm{proj}}(\mathfrak{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{K}^+(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathfrak{K}^-(\mathfrak{A})$) sur les complexes injectifs (resp. projectifs) en tout degré.
Si $\mathfrak{A}$ a assez d'injectifs (resp. de projectifs), le foncteur $\mathfrak{K}^+_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{D}^+(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathfrak{K}^-_{\mathrm{proj}}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{D}^-(\mathfrak{A})$) est une équivalence de catégories.

Foncteurs dérivés abéliens

Foncteurs dérivés

Soit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}$ un foncteur triangulé, et notons $\mathscr{F}_\pm$ sa restriction à $\mathfrak{K}^\pm(\mathfrak{A})$.
Si $\mathfrak{A}$ a assez d'injectifs (resp. de projectifs), son dérivé droit (resp. gauche) est calculé par

$$\mathbb{R}\mathscr{F}_+\colon \mathscr{D}^+(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{K}^+_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathscr{F}|_{\mathfrak{K}^+_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{A})}} \mathfrak{D} \qquad \text{(resp. } \mathbb{L}\mathscr{F}_-\colon \mathscr{D}^-(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{K}^-_{\mathrm{proj}}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathscr{F}|_{\mathfrak{K}^-_{\mathrm{proj}}(\mathfrak{A})}} \mathfrak{D}\text{).}$$

Un foncteur additif $\mathscr{F}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ induit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathfrak{K}(\mathscr{F})} \mathfrak{K}(\mathfrak{B}) \to \mathscr{D}(\mathfrak{B})$.

Foncteurs dérivés abéliens

Foncteurs dérivés

Soit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}$ un foncteur triangulé, et notons $\mathscr{F}_{\pm}$ sa restriction à $\mathfrak{K}^{\pm}(\mathfrak{A})$.
Si $\mathfrak{A}$ a assez d'injectifs (resp. de projectifs), son dérivé droit (resp. gauche) est calculé par

$$\mathbb{R}\mathscr{F}_{+}\colon\ \mathscr{D}^{+}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{K}^{+}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathscr{F}|_{\mathfrak{K}^{+}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{A})}} \mathfrak{D} \qquad (\text{resp. } \mathbb{L}\mathscr{F}_{-}\colon\ \mathscr{D}^{-}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{K}^{-}_{\mathrm{proj}}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathscr{F}|_{\mathfrak{K}^{-}_{\mathrm{proj}}(\mathfrak{A})}} \mathfrak{D}).$$

Un foncteur additif $\mathscr{F}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ induit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathfrak{K}(\mathscr{F})} \mathfrak{K}(\mathfrak{B}) \to \mathscr{D}(\mathfrak{B})$.

Lemme

Soient $\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathfrak{B} \xrightarrow{\mathscr{G}} \mathfrak{C}$ des foncteurs exacts à gauche (resp. droite) entre catégories abéliennes tels que $\mathscr{F}$ applique les injectifs (resp. projectifs) sur des $\mathscr{G}$-acycliques.
La transformation naturelle $\mathbb{R}(\mathscr{G}\mathscr{F}) \Rightarrow \mathbb{R}\mathscr{G} \circ \mathbb{R}\mathscr{F}$ (resp. $\mathbb{L}\mathscr{G} \circ \mathbb{L}\mathscr{F} \Rightarrow \mathbb{L}(\mathscr{G}\mathscr{F})$) est un iso.

Catégories dérivées non bornées

Définition

Une catégorie abélienne est **de Grothendieck** si elle est cocomplète, les colimites préservent les monos, et elle a un objet générateur.

Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace annelé, $\mathfrak{Mod}_{\mathcal{O}}$ est de Grothendieck (*e.g.* $\mathfrak{Mod}_{\Bbbk_X} \simeq \mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$).

Catégories dérivées non bornées

Définition

Une catégorie abélienne est **de Grothendieck** si elle est cocomplète, les colimites préservent les monos, et elle a un objet générateur.

Si $(X, \mathscr{O})$ est un espace annelé, $\mathfrak{Mod}_{\mathscr{O}}$ est de Grothendieck (*e.g.* $\mathfrak{Mod}_{\Bbbk_X} \simeq \mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$).

Définition (Complexes homotopiquement injectifs)

Un complexe X dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ est **homotopiquement injectif** si pour tout complexe acyclique Z, tout morphisme $Z \to X$ est homotope à 0, *i.e.* si $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(Z, X) = 0$.

Catégories dérivées non bornées

Définition

Une catégorie abélienne est **de Grothendieck** si elle est cocomplète, les colimites préservent les monos, et elle a un objet générateur.

Si $(X, \mathscr{O})$ est un espace annelé, $\mathfrak{Mod}_{\mathscr{O}}$ est de Grothendieck (*e.g.* $\mathfrak{Mod}_{\Bbbk_X} \simeq \mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$).

Définition (Complexes homotopiquement injectifs)

Un complexe X dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ est **homotopiquement injectif** si pour tout complexe acyclique Z, tout morphisme $Z \to X$ est homotope à 0, *i.e.* si $\hom_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}(Z, X) = 0$.

Théorème

Si $\mathfrak{A}$ est de Grothendieck, $\mathscr{D}(\mathfrak{A})$ est équivalente (en tant que catégorie triangulée) à la sous-catégorie épaisse de $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ sur les complexes homotopiquement injectifs.

Deuxième partie : Méthodes homotopiques en algèbre homologique

Section 4: Méthodes simpliciales

Objets simpliciaux standards

Définition (Objets simpliciaux)

La **catégorie d'indexation simpliciale** $\mathbb{\Delta}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Cat}$ sur les ensembles ordonnés non vides $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}, n \in \mathbb{N}$.
Un objet simplicial (resp. cosimplicial) dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un foncteur $X\colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{C}$ (resp. $X\colon \mathbb{\Delta} \to \mathfrak{C}$). On note $X_n = X([n])$ (resp. $X^n = X([n])$). On note $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$ la catégorie des objets simpliciaux dans $\mathfrak{C}$.

Objets simpliciaux standards

Définition (Objets simpliciaux)

La **catégorie d'indexation simpliciale** $\mathbb{\Delta}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Cat}$ sur les ensembles ordonnés non vides $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}, n \in \mathbb{N}$.
Un objet simplicial (resp. cosimplicial) dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un foncteur $X \colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{C}$ (resp. $X \colon \mathbb{\Delta} \to \mathfrak{C}$). On note $X_n = X([n])$ (resp. $X^n = X([n])$). On note $\mathfrak{sC}$ la catégorie des objets simpliciaux dans $\mathfrak{C}$.

$\Delta^n_\bullet \coloneqq \hom(-, [n])$ le n-simplexe standard. Par Yoneda, $X_n = \hom(\Delta^n_\bullet, X_\bullet)\ \forall X_\bullet \in \mathfrak{sEns}$.

Objets simpliciaux standards

Définition (Objets simpliciaux)

La **catégorie d'indexation simpliciale** $\mathbb{\Delta}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Cat}$ sur les ensembles ordonnés non vides $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}, n \in \mathbb{N}$.
Un objet simplicial (resp. cosimplicial) dans une catégorie $\mathfrak{C}$ est un foncteur $X \colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{C}$ (resp. $X \colon \mathbb{\Delta} \to \mathfrak{C}$). On note $X_n = X([n])$ (resp. $X^n = X([n])$). On note $\mathfrak{s}\mathfrak{C}$ la catégorie des objets simpliciaux dans $\mathfrak{C}$.

$\Delta^n_\bullet := \hom(-, [n])$ le n-simplexe standard. Par Yoneda, $X_n = \hom(\Delta^n_\bullet, X_\bullet)\ \forall X_\bullet \in \mathfrak{sEns}$.

$\mathfrak{sEns}$ est une catégorie de préfaisceaux, donc Yoneda implique qu'elle est cartésienne fermée, *i.e.* pour tout $X_\bullet$ le foncteur $- \times X_\bullet$ a un adjoint à droite $\underline{\hom}_\bullet(X_\bullet, -)$, le hom interne. En effet,

$$\underline{\hom}_n(X_\bullet, Y_\bullet) = \hom(\Delta^n_\bullet, \underline{\hom}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)) = \hom(\Delta^n_\bullet \times X_\bullet, Y_\bullet).$$

Présentation par générateurs et relations

Proposition

La catégorie Δ est engendrée par les morphismes de

cofaces $\delta^i : [n] \to [n+1]$: « saute i » (pour $0 \leq i \leq n+1$) et de

codégénérescences $\sigma^i : [n] \to [n-1]$: « répète i » (pour $0 \leq i \leq n-1$)

soumis aux relations simpliciales.

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left=2, "\delta^1"] \arrow[r, shift right=2, "\delta^0"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma^0" description] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r] \arrow[r, shift right=4] & {[2]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left=6] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=6] & \cdots \arrow[l, shift left=4] \arrow[l] \arrow[l, shift right=4]
\end{tikzcd}
$$

Présentation par générateurs et relations

Proposition

La catégorie Δ est engendrée par les morphismes de

cofaces $\delta^i \colon [n] \to [n+1]$: « saute i » (pour $0 \leq i \leq n+1$) et de

codégénérescences $\sigma^i \colon [n] \to [n-1]$: « répète i » (pour $0 \leq i \leq n-1$)

soumis aux relations simpliciales.

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left=4, "\delta^1"] \arrow[r, shift right=4, "\delta^0"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma^0" description] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r] \arrow[r, shift right=4] & {[2]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left=6] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=6] & \cdots \arrow[l, shift left=4] \arrow[l] \arrow[l, shift right=4]
\end{tikzcd} .$$

Si $X_\bullet$ est un objet simplicial (resp. $X^\bullet$ est un objet cosimplicial), on notera $d_i = X(\delta^i) \colon X_{n+1} \to X_n$ et $s_i = X(\sigma^i) \colon X_{n-1} \to X_n$ (resp. $d^i = X(\delta^i) \colon X^n \to X^{n+1}$ et $s^i = X(\sigma^i) \colon X^n \to X^{n-1}$).

Exemple : monoïdes

La catégorie simpliciale augmentée Δ_a est obtenue à partir de Δ en rajoutant un objet initial $[-1] = \emptyset$.
Elle est munie d'une structure monoïdale stricte (mais pas symétrique) par l'addition ($[n] + [m] = [n + m + 1]$), et $[0]$ est un monoïde (par $\sigma^0 \colon [0] + [0] = [1] \to [0]$).

Exemple : monoïdes

La catégorie simpliciale augmentée Δ_a est obtenue à partir de Δ en rajoutant un objet initial $[-1] = \emptyset$.

Elle est munie d'une structure monoïdale stricte (mais pas symétrique) par l'addition $([n] + [m] = [n+m+1])$, et $[0]$ est un monoïde (par $\sigma^0 \colon [0] + [0] = [1] \to [0]$).

Proposition

$(\Delta_a, +, [0])$ est l'exemple initial de catégorie monoïdale stricte munie d'un monoïde, c'est-à-dire qu'un monoïde M dans une catégorie monoïdale stricte $(\mathfrak{V}, \otimes, I)$ est équivalent à un foncteur monoïdal $\Delta_a \to \mathfrak{V}$

Exemple : monoïdes

La catégorie simpliciale augmentée Δ_a est obtenue à partir de Δ en rajoutant un objet initial $[-1] = \emptyset$.
Elle est munie d'une structure monoïdale stricte (mais pas symétrique) par l'addition ($[n] + [m] = [n + m + 1]$), et $[0]$ est un monoïde (par $\sigma^0 \colon [0] + [0] = [1] \to [0]$).

Proposition

$(\Delta_a, +, [0])$ est l'exemple initial de catégorie monoïdale stricte munie d'un monoïde, c'est-à-dire qu'un monoïde M dans une catégorie monoïdale stricte $(\mathfrak{V}, \otimes, I)$ est équivalent à un foncteur monoïdal $\Delta_a \to \mathfrak{V}$, correspondant à l'objet cosimplicial coaugmenté

$$\begin{tikzcd} M^{\otimes 0} = I \arrow[r, "\text{unité}"] & M \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift right=3] & M^{\otimes 2} \arrow[l, dashed, "\text{mult}"] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r] \arrow[r, shift right=4] & M^{\otimes 3} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left=6] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=6] & \cdots \arrow[l, shift left=4] \arrow[l] \arrow[l, shift right=4] \end{tikzcd} .$$

Exemple : faces, bords et cornets

Pour $0 \leq i \leq n$, la **i-ième face** $\partial_i \Delta^n_\bullet$ de $\Delta^n_\bullet$ est le sous-ensemble simplicial correspondant par le lemme de Yoneda à $\delta_i \colon [n-1] \hookrightarrow [n]$. Il s'agit du sous-ensemble simplicial engendré par $\delta^i \in \Delta^n_{n-1}$.

Exemple : faces, bords et cornets

Pour $0 \leq i \leq n$, la **i-ième face** $\partial_i \Delta^n_\bullet$ de $\Delta^n_\bullet$ est le sous-ensemble simplicial correspondant par le lemme de Yoneda à $\delta_i \colon [n-1] \hookrightarrow [n]$. Il s'agit du sous-ensemble simplicial engendré par $\delta^i \in \Delta^n_{n-1}$.

Le **bord** de $\Delta^n_\bullet$, noté $\partial \Delta^n_\bullet$, est l'union des faces de $\Delta^n_\bullet$.

Le **k-ième cornet** est $\Lambda^n_{k,\bullet} = \partial \Delta^n_\bullet \setminus \partial_k \Delta^n_\bullet$; c'est donc le sous-ensemble simplicial de $\Delta^n_\bullet$ engendré par $\{\delta^0, \ldots, \delta^{k-1}, \delta^{k+1}, \ldots, \delta^n\} \subset \Delta^n_{n-1}$.

Exemple : faces, bords et cornets

Pour $0 \leq i \leq n$, la **i-ième face** $\partial_i \Delta^n_\bullet$ de $\Delta^n_\bullet$ est le sous-ensemble simplicial correspondant par le lemme de Yoneda à $\delta_i \colon [n-1] \hookrightarrow [n]$. Il s'agit du sous-ensemble simplicial engendré par $\delta^i \in \Delta^n_{n-1}$.

Le **bord** de $\Delta^n_\bullet$, noté $\partial \Delta^n_\bullet$, est l'union des faces de $\Delta^n_\bullet$.

Le **k-ième cornet** est $\Lambda^n_{k,\bullet} = \partial \Delta^n_\bullet \setminus \partial_k \Delta^n_\bullet$; c'est donc le sous-ensemble simplicial de $\Delta^n_\bullet$ engendré par $\{\delta^0, \ldots, \delta^{k-1}, \delta^{k+1}, \ldots, \delta^n\} \subset \Delta^n_{n-1}$.

$$\Lambda^2_{0,\bullet} = \begin{tikzcd} & 1 & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$$

Exemple : faces, bords et cornets

Pour $0 \leq i \leq n$, la **i-ième face** $\partial_i \Delta^n_\bullet$ de $\Delta^n_\bullet$ est le sous-ensemble simplicial correspondant par le lemme de Yoneda à $\delta_i \colon [n-1] \hookrightarrow [n]$. Il s'agit du sous-ensemble simplicial engendré par $\delta^i \in \Delta^n_{n-1}$.

Le **bord** de $\Delta^n_\bullet$, noté $\partial \Delta^n_\bullet$, est l'union des faces de $\Delta^n_\bullet$.

Le **k-ième cornet** est $\Lambda^n_{k,\bullet} = \partial \Delta^n_\bullet \setminus \partial_k \Delta^n_\bullet$; c'est donc le sous-ensemble simplicial de $\Delta^n_\bullet$ engendré par $\{\delta^0, \dots, \delta^{k-1}, \delta^{k+1}, \dots, \delta^n\} \subset \Delta^n_{n-1}$.

$$\Lambda^2_{0,\bullet} = \begin{tikzcd} & 1 & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd} \qquad \Lambda^2_{1,\bullet} = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 2 \end{tikzcd} \qquad \Lambda^2_{2,\bullet} = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$$

Nerfs et réalisations : cadre général

On travaille avec $\mathfrak{V}$ est une bonne catégorie monoïdale symétrique d'enrichissement.

Construction (Nerf et réalisation)

Soit $\mathscr{I}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ un $\mathfrak{V}$-foncteur (entre catégories $\mathfrak{V}$-enrichies). Son foncteur **nerf** $N_{\mathscr{I}}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V})$ est la restriction du plongement de Yoneda de $\mathfrak{C}$ selon $\mathscr{I}$, c'est-à-dire $N_{\mathscr{I}}(C) = \hom_{\mathfrak{C}}(\mathscr{I}-, C)$.

Nerfs et réalisations : cadre général

On travaille avec $\mathfrak{V}$ est une bonne catégorie monoïdale symétrique d'enrichissement.

Construction (Nerf et réalisation)

Soit $\mathscr{I}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ un $\mathfrak{V}$-foncteur (entre catégories $\mathfrak{V}$-enrichies). Son foncteur **nerf** $N_{\mathscr{I}}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V})$ est la restriction du plongement de Yoneda de $\mathfrak{C}$ selon $\mathscr{I}$, c'est-à-dire $N_{\mathscr{I}}(C) = \hom_{\mathfrak{C}}(\mathscr{I}-, C)$.

Ce foncteur admet un adjoint à gauche $|-|_{\mathscr{I}}\colon \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V}) \to \mathfrak{C}$, donné explicitement comme l'extension oplaxe de $\mathscr{I}$ le long du plongement de Yoneda de $\mathfrak{D}$. On l'appelle le foncteur de **réalisation géométrique**.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[rr, "\mathscr{I}"] \arrow[d] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathfrak{C} \\
\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V}) \arrow[urr, bend right, "|-|_{\mathscr{I}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nerfs et réalisations : cadre général

On travaille avec $\mathfrak{V}$ est une bonne catégorie monoïdale symétrique d'enrichissement.

Construction (Nerf et réalisation)

Soit $\mathscr{J} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ un $\mathfrak{V}$-foncteur (entre catégories $\mathfrak{V}$-enrichies). Son foncteur **nerf** $N_{\mathscr{J}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V})$ est la restriction du plongement de Yoneda de $\mathfrak{C}$ selon $\mathscr{J}$, c'est-à-dire $N_{\mathscr{J}}(C) = \hom_{\mathfrak{C}}(\mathscr{J}-, C)$.

Ce foncteur admet un adjoint à gauche $|-|_{\mathscr{J}} : \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V}) \to \mathfrak{C}$, donné explicitement comme l'extension oplaxe de $\mathscr{J}$ le long du plongement de Yoneda de $\mathfrak{D}$. On l'appelle le foncteur de **réalisation géométrique**.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[rr, "\mathscr{J}"] \arrow[d] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathfrak{C} \\
\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{D}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{V}) \arrow[urr, bend right, "|-|_{\mathscr{J}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

On s'intéressera généralement aux cas où $\mathfrak{D} = \mathbf{\Delta}$ (ou une version librement enrichie) ; ainsi le foncteur $\mathscr{J}$ n'est rien d'autre qu'un objet cosimplicial de $\mathfrak{C}$.

Exemple : nerfs de catégories

On prend $\mathscr{I} : \mathbb{\Delta} \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ appliquant $[n]$ sur la catégorie $[n]$. Alors $N_{\mathscr{I}}(\mathfrak{C})_n = \hom([n], \mathfrak{C})$ est l'ensemble des suites de n flèches composables de $\mathfrak{C}$, avec faces et dégénérescences données respectivement par la composition et l'insertion de l'identité.

Exemple : nerfs de catégories

On prend $\mathscr{I} : \Delta \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ appliquant $[n]$ sur la catégorie $[n]$. Alors $N_{\mathscr{I}}(\mathfrak{C})_n = \hom([n], \mathfrak{C})$ est l'ensemble des suites de n flèches composables de $\mathfrak{C}$, avec faces et dégénérescences données respectivement par la composition et l'insertion de l'identité.

L'adjoint à gauche construit la catégorie fondamentale d'un ensemble simplicial, dont les objets sont les 0-simplexes, et les flèches les 1-simplexes modulo les relations indiquées dans la description du nerf et celles identifiant le bord d'un 2-simplexe.

Exemple : nerfs de catégories

On prend $\mathscr{I} : \Delta \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ appliquant $[n]$ sur la catégorie $[n]$. Alors $N_{\mathscr{I}}(\mathfrak{C})_n = \hom([n], \mathfrak{C})$ est l'ensemble des suites de n flèches composables de $\mathfrak{C}$, avec faces et dégénérescences données respectivement par la composition et l'insertion de l'identité.

L'adjoint à gauche construit la catégorie fondamentale d'un ensemble simplicial, dont les objets sont les 0-simplexes, et les flèches les 1-simplexes modulo les relations indiquées dans la description du nerf et celles identifiant le bord d'un 2-simplexe.

Proposition

Le foncteur nerf est pleinement fidèle. Son image essentielle est engendrée par les ensembles simpliciaux $X_\bullet$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

de Segal : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \xrightarrow{\simeq} X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ est un isomorphisme

Exemple : nerfs de catégories

On prend $\mathscr{I} : \Delta \hookrightarrow \mathfrak{Cat}$ appliquant $[n]$ sur la catégorie $[n]$. Alors $N_{\mathscr{I}}(\mathfrak{C})_n = \hom([n], \mathfrak{C})$ est l'ensemble des suites de n flèches composables de $\mathfrak{C}$, avec faces et dégénérescences données respectivement par la composition et l'insertion de l'identité.

L'adjoint à gauche construit la catégorie fondamentale d'un ensemble simplicial, dont les objets sont les 0-simplexes, et les flèches les 1-simplexes modulo les relations indiquées dans la description du nerf et celles identifiant le bord d'un 2-simplexe.

Proposition

Le foncteur nerf est pleinement fidèle. Son image essentielle est engendrée par les ensembles simpliciaux $X_\bullet$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

de Segal : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \xrightarrow{\simeq} X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ est un isomorphisme ;

de Kan intérieure stricte : tout cornet intérieur $\Lambda^n_{k,\bullet} \to X_\bullet$ (avec $0 < k < n$) admet une unique extension le long de $\Lambda^n_{k,\bullet} \hookrightarrow \Delta^n_\bullet$.

Exemple : ensembles simpliciaux et espaces topologiques

Exemple

On prend pour $\mathscr{I}$ le foncteur $\mathbb{\Delta} \to \mathfrak{Top}$ associant à $[n]$ le simplexe topologique $|\Delta^n|$. Alors $|-|$ est le foncteur de réalisation géométrique, construisant un espace topologique $|X_\bullet|$ en recollant les simplexes de $X_\bullet$ selon les relations données par les faces et les dégénérescences (en particulier $|\Delta^n_\bullet| = |\Delta^n|$). Le nerf d'un espace X, noté $\mathrm{Sing}(X)_\bullet$ ou $\Pi_\infty(X)_\bullet$, est l'ensemble simplicial calculant son homologie singulière, $\mathrm{Sing}(X)_n = \hom(|\Delta^n|, X)$.

Exemple : ensembles simpliciaux et espaces topologiques

Exemple

On prend pour $\mathscr{I}$ le foncteur $\Delta \to \mathfrak{Top}$ associant à $[n]$ le simplexe topologique $|\Delta^n|$. Alors $|-|$ est le foncteur de réalisation géométrique, construisant un espace topologique $|X_\bullet|$ en recollant les simplexes de $X_\bullet$ selon les relations données par les faces et les dégénérescences (en particulier $|\Delta^n_\bullet| = |\Delta^n|$). Le nerf d'un espace X, noté $\mathrm{Sing}(X)_\bullet$ ou $\Pi_\infty(X)_\bullet$, est l'ensemble simplicial calculant son homologie singulière, $\mathrm{Sing}(X)_n = \hom(|\Delta^n|, X)$.

Les nerfs d'espaces topologiques satisfont également une propriété spécifique :

Définition (Complexes de Kan)

Un ensemble simplicial est un complexe de Kan si tout cornet admet un remplissage en un simplexe.

Le nerf d'une catégorie $\mathfrak{C}$ est un complexe de Kan si et seulement si $\mathfrak{C}$ est un groupoïde.

Théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux

À un complexe de Kan $X_\bullet$ on associe des groupes d'homotopie combinatoires $\pi_n^{\mathrm{comb}}(X_\bullet)$.
On appelle **équivalence faible d'homotopie** de complexes de Kan un morphisme de complexes de Kan induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie.

Lemme

Pour tout complexe de Kan $X_\bullet$, on a $\pi_\bullet^{\mathrm{comb}}(X_\bullet) \simeq \pi_\bullet(|X_\bullet|)$.

Théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux

À un complexe de Kan $X_\bullet$ on associe des groupes d'homotopie combinatoires $\pi_n^{\mathrm{comb}}(X_\bullet)$.
On appelle **équivalence faible d'homotopie** de complexes de Kan un morphisme de complexes de Kan induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie.

Lemme

Pour tout complexe de Kan $X_\bullet$, on a $\pi_\bullet^{\mathrm{comb}}(X_\bullet) \simeq \pi_\bullet(|X_\bullet|)$.

On appelle donc **équivalence faible d'homotopie** d'ensemble simpliciaux un morphisme induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie des réalisations géométriques.

Théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux

Théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux

À un complexe de Kan $X_\bullet$ on associe des groupes d'homotopie combinatoires $\pi_n^{\mathrm{comb}}(X_\bullet)$.
On appelle **équivalence faible d'homotopie** de complexes de Kan un morphisme de complexes de Kan induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie.

Lemme

Pour tout complexe de Kan $X_\bullet$, on a $\pi_\bullet^{\mathrm{comb}}(X_\bullet) \simeq \pi_\bullet(|X_\bullet|)$.

On appelle donc **équivalence faible d'homotopie** d'ensemble simpliciaux un morphisme induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie des réalisations géométriques.

Proposition

Pour tout complexe de Kan $X_\bullet$, l'unité $X_\bullet \to \mathrm{Sing}(|X_\bullet|)_\bullet$ est une équivalence faible.
Dualement, pour tout espace X, la coünité $|\mathrm{Sing}(X)_\bullet| \to X$ est une équivalence faible.

Sommaire - Section 4: Méthodes simpliciales

Exemple : nerf de Moore

Deux complexes

1. Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne. Soit $X_\bullet \in \mathfrak{s}\mathfrak{A}$. Son **complexe de Moore** $M(X)^\bullet$ est donné par $M(X)^{-n} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(d_i \colon X_n \to X_{n-1})$, avec $d = d_0|_{M(X)^{-n}}$.

Exemple : nerf de Moore

Deux complexes

1. Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne. Soit $X_\bullet \in \mathfrak{s}\mathfrak{A}$. Son **complexe de Moore** $M(X)^\bullet$ est donné par $M(X)^{-n} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(d_i \colon X_n \to X_{n-1})$, avec $d = d_0|_{M(X)^{-n}}$.
2. Le complexe des chaînes (non-normalisées) de $X_\bullet \in \mathfrak{s}\mathfrak{A}$ est le complexe $C(X)^\bullet$ donné par $C(X)^{-n} = X_n$ avec différentielle $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$.
   On définit $D(X)^\bullet$ comme le sous-complexe de $C(X)^\bullet$ engendré par les éléments dégénérés, *i.e.* dans l'image des dégénérescences $s_i, i = 0, \ldots, n-1$. Le **complexe des chaînes normalisées** de $X_\bullet$ est $C(X)^\bullet / D(X)^\bullet$.

Exemple : nerf de Moore

Deux complexes

1. Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne. Soit $X_\bullet \in s\mathfrak{A}$. Son **complexe de Moore** $M(X)^\bullet$ est donné par $M(X)^{-n} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(d_i \colon X_n \to X_{n-1})$, avec $d = d_0|_{M(X)^{-n}}$.
2. Le complexe des chaînes (non-normalisées) de $X_\bullet \in s\mathfrak{A}$ est le complexe $C(X)^\bullet$ donné par $C(X)^{-n} = X_n$ avec différentielle $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$.
   On définit $D(X)^\bullet$ comme le sous-complexe de $C(X)^\bullet$ engendré par les éléments dégénérés, *i.e.* dans l'image des dégénérescences $s_i, i = 0, \ldots, n-1$. Le **complexe des chaînes normalisées** de $X_\bullet$ est $C(X)^\bullet / D(X)^\bullet$.

Lemme

La suite exacte $D(X)^\bullet \to C(X)^\bullet \to C(X)/D(X)^\bullet$ scinde, et $M(X)^\bullet \to C(X)^\bullet \to C(X)/D(X)^\bullet$ est un isomorphisme.

Exemple : nerf de Moore

Deux complexes

1. Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne. Soit $X_\bullet \in s\mathfrak{A}$. Son **complexe de Moore** $M(X)^\bullet$ est donné par $M(X)^{-n} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(d_i \colon X_n \to X_{n-1})$, avec $d = d_0|_{M(X)^{-n}}$.
2. Le complexe des chaînes (non-normalisées) de $X_\bullet \in s\mathfrak{A}$ est le complexe $C(X)^\bullet$ donné par $C(X)^{-n} = X_n$ avec différentielle $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$.
   On définit $D(X)^\bullet$ comme le sous-complexe de $C(X)^\bullet$ engendré par les éléments dégénérés, *i.e.* dans l'image des dégénérescences $s_i, i = 0, \ldots, n-1$. Le **complexe des chaînes normalisées** de $X_\bullet$ est $C(X)^\bullet / D(X)^\bullet$.

Lemme

La suite exacte $D(X)^\bullet \to C(X)^\bullet \to C(X)/D(X)^\bullet$ scinde, et
$M(X)^\bullet \to C(X)^\bullet \to C(X)/D(X)^\bullet$ est un isomorphisme.
En outre, le complexe $D(X)^\bullet$ est acyclique (et même contractile), donc les morphismes $C(X)^\bullet \to C(X)/D(X)^\bullet$ et $M(X)^\bullet \to C(X)^\bullet$ sont des quasi-isomorphismes.

Nerf de Moore II

Homologie simpliciale

Soit X un espace topologique. Alors $M(\mathrm{Sing}(X)_\bullet)^\bullet$ est le complexe des cochaînes singulières de X.

Nerf de Moore II

Homologie simpliciale

Soit X un espace topologique. Alors $M(\mathrm{Sing}(X)_\bullet)^\bullet$ est le complexe des cochaînes singulières de X.

Proposition (Kan)

Notons $\Bbbk[\Delta]$ la $\mathfrak{Mod}_\Bbbk$-catégorie libre sur Δ et $\Bbbk\Delta^n_\bullet$ les $\Bbbk$-modules simpliciaux représentables ; ainsi $(\Bbbk\Delta^n)_m = \Bbbk[\Delta^n_m]$.
On définit un $\mathfrak{Mod}_\Bbbk$-foncteur $\mathscr{I} \colon \Bbbk[\Delta] \to \mathfrak{Ch}(\mathfrak{Mod}_k)$ en appliquant $[n]$ sur $M(\Bbbk\Delta^n_\bullet)^\bullet$. Alors M est le foncteur de nerf induit par $\mathscr{I}$.

De façon générale, le foncteur M (relativement à une catégorie abélienne) admet un adjoint à gauche, noté Γ, avec $\Gamma(C^\bullet)_n = \bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[k]} C^{-k}$ pour tout complexe $C^\bullet$.

La correspondance de Dold–Kan

Théorème (Dold–Puppe)

La restricition de l'adjonction $\Gamma \dashv M$ à la catégorie des complexes connectifs (*i.e.* concentrés en degrés non-strictement positifs) est une équivalence de catégories.

La correspondance de Dold–Kan

Théorème (Dold–Puppe)

La restricition de l'adjonction $\Gamma \dashv M$ à la catégorie des complexes connectifs (*i.e.* concentrés en degrés non-strictement positifs) est une équivalence de catégories.

Théorème (Dold–Kan)

La correspondance de Dold–Puppe induit une équivalence de catégories relatives : pour tout $X_\bullet \in \mathfrak{s}\mathfrak{A}$, $\Gamma(M(X))_\bullet \to X_\bullet$ est une équivalence faible d'homotopie, et pour tout $C^\bullet \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, $C^\bullet \to M(\Gamma(C))^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

La correspondance de Dold–Kan

Théorème (Dold–Puppe)

La restricition de l'adjonction $\Gamma \dashv M$ à la catégorie des complexes connectifs (*i.e.* concentrés en degrés non-strictement positifs) est une équivalence de catégories.

Théorème (Dold–Kan)

La correspondance de Dold–Puppe induit une équivalence de catégories relatives : pour tout $X_\bullet \in s\mathfrak{A}$, $\Gamma(M(X))_\bullet \to X_\bullet$ est une équivalence faible d'homotopie, et pour tout $C^\bullet \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$, $C^\bullet \to M(\Gamma(C))^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

Espaces d'Eilenberg–MacLane

Rappelons que, pour G un groupe abélien et $n \in \mathbb{N}$, un type $K(G,n)$ est un espace topologique avec $\pi_i(K(G,n)) = \delta_{i,n}G$, et que pour tout espace X on a $\pi_0 \operatorname{Map}(X, K(G,n)) \simeq \mathrm{H}^n_{\mathrm{sing}}(X)$. Nous avons vu que $M(\operatorname{Sing}(X))$ calcule $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{sing}}(X)$. Notons $G[n]$ le complexe avec G en degré $-n$; alors $|\Gamma(G[n])_\bullet|$ est de type $K(G,n)$.

Sommaire - Section 5: Catégories de modèles

Fonceteurs dérivés de foncteurs relatifs

Définition (Foncteurs dérivés)

Soient $(\mathfrak{C}, \mathscr{V})$ et $(\mathfrak{D}, \mathscr{W})$ deux catégories relatives, avec $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}]$ et $\mathscr{P} \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ les foncteurs canoniques. Soit $\mathscr{F} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un foncteur.
Un **foncteur dérivé** droit (resp. gauche) de $\mathscr{F}$ est une extension oplaxe (resp. laxe) de $\mathscr{P} \circ \mathscr{F}$ le long de $\mathscr{L}$, que l'on note $\mathbb{R}\mathscr{F}$ (resp. $\mathbb{L}\mathscr{F}$).

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "\mathscr{L}"'] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathscr{P}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}] \\
\mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}] \arrow[urr, dashed, bend right, "\mathbb{R}\mathscr{F}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "\mathscr{L}"'] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathscr{P}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow"] & \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}] \\
\mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}] \arrow[urr, dashed, bend right, "\mathbb{L}\mathscr{F}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Foncteurs dérivés de foncteurs relatifs

Définition (Foncteurs dérivés)

Soient $(\mathfrak{C}, \mathscr{V})$ et $(\mathfrak{D}, \mathscr{W})$ deux catégories relatives, avec $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}]$ et $\mathscr{P}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ les foncteurs canoniques. Soit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un foncteur.
Un **foncteur dérivé** droit (resp. gauche) de $\mathscr{F}$ est une extension oplaxe (resp. laxe) de $\mathscr{P} \circ \mathscr{F}$ le long de $\mathscr{L}$, que l'on note $\mathbb{R}\mathscr{F}$ (resp. $\mathbb{L}\mathscr{F}$).

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "\mathscr{L}"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathscr{P}"] & \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}] \\
\mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}] \arrow[urrr, dashed, bend right, "\mathbb{R}\mathscr{F}"'] & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "\mathscr{L}"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow"] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathscr{P}"] & \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}] \\
\mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}] \arrow[urrr, dashed, bend right, "\mathbb{L}\mathscr{F}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Foncteurs homotopiques

Si $\mathscr{F}$ est un foncteur relatif, $\mathscr{P} \circ \mathscr{F}$ se factorise par un foncteur $\mathfrak{C}[\mathscr{V}^{-1}] \to \mathfrak{D}[\mathscr{W}^{-1}]$ unique à isomorphisme naturel unique près, et donc un dérivé droit et gauche de $\mathscr{F}$.

Résolutions et catégories d'homotopie

Définition (Résolutions)

Soit $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ une catégorie relative. Une **résolution par la gauche** sur $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ est un endofoncteur $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{M}$ muni d'une équivalence faible naturelle $\chi\colon \mathscr{Q} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$.
Une **résolution par la droite** est $\mathscr{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ muni de $\rho\colon \mathrm{id}_{\mathfrak{M}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathscr{Q}$.

Résolutions et catégories d'homotopie

Définition (Résolutions)

Soit $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ une catégorie relative. Une **résolution par la gauche** sur $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ est un endofoncteur $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{M}$ muni d'une équivalence faible naturelle $\chi \colon \mathscr{Q} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$.
Une **résolution par la droite** est $\mathscr{R} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ muni de $\rho \colon \mathrm{id}_{\mathfrak{M}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathscr{Q}$.

Définition (Catégorie homotopique)

Une **catégorie homotopique** est une catégorie relative dont les équivalences faibles vérifient la propriété 2 parmi 6 : si hg et gf sont des équivalences faibles, alors f, g, h et hgf aussi.
Sa localisation est appelée sa **catégorie d'homotopie** et notée $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$.

Résolutions et catégories d'homotopie

Définition (Résolutions)

Soit $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ une catégorie relative. Une **résolution par la gauche** sur $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ est un endofoncteur $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{M}$ muni d'une équivalence faible naturelle $\chi\colon \mathscr{Q} \xRightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$.
Une **résolution par la droite** est $\mathscr{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ muni de $\rho\colon \mathrm{id}_{\mathfrak{M}} \xRightarrow{\sim} \mathscr{Q}$.

Définition (Catégorie homotopique)

Une **catégorie homotopique** est une catégorie relative dont les équivalences faibles vérifient la propriété 2 parmi 6 : si hg et gf sont des équivalences faibles, alors f, g, h et hgf aussi.
Sa localisation est appelée sa **catégorie d'homotopie** et notée $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$.

Proposition

Soit $\mathscr{D}$ une résolution (par la gauche ou la droite). La catégorie d'homotopie de toute sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}$ contenant l'image essentielle de $\mathscr{D}$ est équivalente à $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$.

Résolutions et foncteurs dérivés

Définition (Foncteur résoluble)

Un foncteur $\mathscr{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ entre catégories relatives est **résoluble à gauche** (resp. **à droite**) s'il existe une résolution par la gauche (resp. par la droite) $\mathscr{D}$ pour $\mathfrak{M}$ telle que la restriction de $\mathscr{F}$ à l'image essentielle de $\mathscr{D}$ soit un foncteur relatif.

Proposition

Soit $\mathscr{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ un foncteur entre catégories homotopiques, et soit $\wp : \mathfrak{N} \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{N})$ le foncteur canonique.
Si $\mathscr{Q}$ est une résolution de $\mathscr{F}$ par la gauche, $\wp \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{Q}$ est un dérivé gauche de $\mathscr{F}$.
Si $\mathscr{R}$ est une résolution de $\mathscr{F}$ par la droite, $\ell \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{R}$ est un dérivé droit de $\mathscr{F}$.

Plus précisément, $\wp\mathscr{F}\mathscr{D} : \mathfrak{M} \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{N})$ définit $\mathbb{D}\mathscr{F} : \mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{N})$ qui est un dérivé de $\mathscr{F}$ et tel que $\mathbb{D}\mathscr{F} \circ \ell \simeq \wp\mathscr{F}\mathscr{D}$, où $\ell : \mathfrak{M} \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$.

Démonstration

On doit vérifier que $\hom(\mathbb{R}\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\simeq} \hom(\mathpzc{p}\mathscr{F}, \mathscr{G} \circ \ell)$ naturellement en $\mathscr{G} \colon \mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{N})$.
Par la propriété universelle définissant $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$, on a $\hom(\mathbb{R}\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \hom(\mathbb{R}\mathscr{F} \circ \ell, \mathscr{G} \circ \ell)$.
Donnons-nous donc une transformation $\eta \colon \mathpzc{p}\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G} \circ \ell$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M} \arrow[r, "\mathpzc{p}\mathscr{F}"] \arrow[d, "\ell"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathpzc{p}\mathscr{F}\rho"] \arrow[dr, phantom, bend left, "\Downarrow \eta"] & \mathrm{Ho}(\mathfrak{N}) \\
\mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \arrow[ur] \arrow[ur, bend right, "\mathscr{G}"'] \arrow[ur, phantom, bend right=15, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] &
\end{tikzcd} ;$$

on cherche une factorisation $\mathpzc{p}\mathscr{F} \overset{\mathpzc{p}\mathscr{F}\rho}{\Rightarrow} \mathbb{R}\mathscr{F} \circ \ell = \mathpzc{p}\mathscr{F}\mathscr{R} \overset{\gamma}{\Rightarrow} \mathscr{G} \circ \ell$.

On doit vérifier que $\hom(\mathbb{R}\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\simeq} \hom(p\mathscr{F}, \mathscr{G} \circ \ell)$ naturellement en $\mathscr{G}\colon \mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{N})$.
Par la propriété universelle définissant $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$, on a $\hom(\mathbb{R}\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \hom(\mathbb{R}\mathscr{F} \circ \ell, \mathscr{G} \circ \ell)$.
Donnons-nous donc une transformation $\eta\colon p\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G} \circ \ell$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M} \arrow[r, "p\mathscr{F}"] \arrow[d, "\ell"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\mathscr{F}\rho"] & \mathrm{Ho}(\mathfrak{N}) \\
\mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \arrow[ur] \arrow[ur, bend right, "\mathscr{G}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta \quad \overset{\gamma}{\dashrightarrow}"] &
\end{tikzcd} ;$$

on cherche une factorisation $p\mathscr{F} \overset{p\mathscr{F}\rho}{\Rightarrow} \mathbb{R}\mathscr{F} \circ \ell = p\mathscr{F}\mathscr{R} \overset{\gamma}{\Rightarrow} \mathscr{G} \circ \ell$.

- $\mathscr{G} \circ \ell$ est un foncteur relatif, donc $\mathscr{G}\ell\rho$ est un isomorphisme naturel $\mathscr{G}\ell \overset{\simeq}{\Rightarrow} \mathscr{G}\ell\mathscr{R}$
- On compose son inverse avec $\eta\mathscr{R}\colon p\mathscr{F}\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{G}\ell\mathscr{R}$

La factorisation $(\mathscr{G}\ell\rho)^{-1}(\eta\mathscr{R})(p\mathscr{F}\rho) = \eta$ vient du carré de naturalité pour η.

Démonstration

On doit vérifier que $\hom(\mathbb{R}\mathscr{F},\mathscr{G}) \xrightarrow{\simeq} \hom(\mathpzc{p}\mathscr{F},\mathscr{G}\circ\ell)$ naturellement en $\mathscr{G}\colon \mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathfrak{N})$.
Par la propriété universelle définissant $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$, on a $\hom(\mathbb{R}\mathscr{F},\mathscr{G}) \simeq \hom(\mathbb{R}\mathscr{F}\circ\ell,\mathscr{G}\circ\ell)$.
Donnons-nous donc une transformation $\eta\colon \mathpzc{p}\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}\circ\ell$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M} \arrow[r, "\mathpzc{p}\mathscr{F}"] \arrow[d, "\ell"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathpzc{p}\mathscr{F}\rho"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \eta"'] & \mathrm{Ho}(\mathfrak{N}) \\
\mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \arrow[ur] \arrow[ur, bend right, "\mathscr{G}"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"']
\end{tikzcd}
;
$$

on cherche une factorisation $\mathpzc{p}\mathscr{F} \overset{\mathpzc{p}\mathscr{F}\rho}{\Rightarrow} \mathbb{R}\mathscr{F}\circ\ell = \mathpzc{p}\mathscr{F}\mathscr{R} \overset{\gamma}{\Rightarrow} \mathscr{G}\circ\ell$.

- $\mathscr{G}\circ\ell$ est un foncteur relatif, donc $\mathscr{G}\ell\rho$ est un isomorphisme naturel $\mathscr{G}\ell \overset{\simeq}{\Rightarrow} \mathscr{G}\ell\mathscr{R}$
- On compose son inverse avec $\eta\mathscr{R}\colon \mathpzc{p}\mathscr{F}\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{G}\ell\mathscr{R}$

La factorisation $(\mathscr{G}\ell\rho)^{-1}(\eta\mathscr{R})(\mathpzc{p}\mathscr{F}\rho) = \eta$ vient du carré de naturalité pour η. L'unicité vient aussi par naturalité et de l'inversibilité des images de ρ par $\mathscr{G}\ell$ et $\mathpzc{p}\mathscr{F}\mathscr{R}$.

Systèmes de factorisation

Définition

- Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{M}$ deux classes de morphismes dans une catégorie $\mathfrak{C}$. On dit que $\mathscr{E}$ est **faiblement orthognal** à $\mathscr{M}$ à gauche,noté $\mathscr{E} \perp \mathscr{M}$, si tout diagramme commutatif solide

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & D \end{tikzcd}$$

  avec $e \in \mathscr{E}$ et $m \in \mathscr{M}$ admet une flèche en pointillés faisant commuter le diagramme. On note $\mathscr{E}^\perp \supseteq \mathscr{M}$ la classe de toutes les flèches orthogonales à $\mathscr{E}$ à droite et ${}^\perp\mathscr{M} \supseteq \mathscr{E}$ la classe des flèches orthogonales à $\mathscr{M}$ à gauche.
- Un **système de factorisation faible** sur $\mathfrak{C}$ est la donnée de deux classes de morphismes $(\mathscr{E}, \mathscr{M})$ telles que $\mathscr{E} = {}^\perp \mathscr{M}$ (et $\mathscr{M} = \mathscr{E}^\perp$) et que toute flèche f de $\mathfrak{C}$ admette une factorisation $f = m \circ e$ avec $m \in \mathscr{M}$ et $e \in \mathscr{E}$.

Exemples

- Dans $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ens}$ (ou tout topos élémentaire), on a un système de factorisation $(\mathrm{epis}, \mathrm{monos})$: toute flèche se factorise par un épimorphisme sur son image suivi de l'inclusion de l'image dans le codomaine. Il s'agit même d'un système de factorisation orthogonal, ce qui signifie que les relèvements demandés sont uniques.

Exemples

- Dans $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ens}$ (ou tout topos élémentaire), on a un système de factorisation $(\text{epis}, \text{monos})$: toute flèche se factorise par un épimorphisme sur son image suivi de l'inclusion de l'image dans le codomaine. Il s'agit même d'un système de factorisation orthogonal, ce qui signifie que les relèvements demandés sont uniques.
- Par définition, un objet P dans une catégorie $\mathfrak{C}$ avec un objet initial $\emptyset$ est projectif ssi le morphisme $\emptyset \longrightarrow P$ est faiblement orthogonal à gauche de tous les épis, et dualement un objet I dans $\mathfrak{C}$ avec objet terminal $*$ est injectif si et seulement si $I \longrightarrow *$ est faiblement orthogonal à droite des monos.

Exemples

- Dans $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ens}$ (ou tout topos élémentaire), on a un système de factorisation $(\text{epis}, \text{monos})$: toute flèche se factorise par un épimorphisme sur son image suivi de l'inclusion de l'image dans le codomaine. Il s'agit même d'un système de factorisation orthogonal, ce qui signifie que les relèvements demandés sont uniques.
- Par définition, un objet P dans une catégorie $\mathfrak{C}$ avec un objet initial $\emptyset$ est projectif ssi le morphisme $\emptyset \longrightarrow P$ est faiblement orthogonal à gauche de tous les épis, et dualement un objet I dans $\mathfrak{C}$ avec objet terminal $*$ est injectif si et seulement si $I \longrightarrow *$ est faiblement orthogonal à droite des monos.
- Un morphisme de schémas est formellement étale (resp. lisse) ssi il est (resp. faiblement) orthogonal aux immersions fermées de carré nul.

Exemples

- Dans $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ens}$ (ou tout topos élémentaire), on a un système de factorisation $(\text{epis}, \text{monos})$: toute flèche se factorise par un épimorphisme sur son image suivi de l'inclusion de l'image dans le codomaine. Il s'agit même d'un système de factorisation orthogonal, ce qui signifie que les relèvements demandés sont uniques.
- Par définition, un objet P dans une catégorie $\mathfrak{C}$ avec un objet initial $\emptyset$ est projectif ssi le morphisme $\emptyset \longrightarrow P$ est faiblement orthogonal à gauche de tous les épis, et dualement un objet I dans $\mathfrak{C}$ avec objet terminal $*$ est injectif si et seulement si $I \longrightarrow *$ est faiblement orthogonal à droite des monos.
- Un morphisme de schémas est formellement étale (resp. lisse) ssi il est (resp. faiblement) orthogonal aux immersions fermées de carré nul.
- Un ensemble simplicial est le nerf d'une catégorie ssi il est orthogonal à droite des inclusions de cornets intérieurs $\Lambda^n_{k,\bullet} \hookrightarrow \Delta^n_\bullet, 0 < k < n$.
  Il est un complexe de Kan ssi il est faiblement orthogonal à droite des inclusions de cornets $\Lambda^n_{k,\bullet} \hookrightarrow \Delta^n_\bullet$.

Définition (Catégorie de modèles)

Une **structure de modèle** sur une catégorie homotopique $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ bicomplète est la donnée de deux classes de morphismes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ telles que $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ et $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ soient des systèmes de factorisation faibles.
Les flèches de $\mathscr{C}$ sont appelées les **cofibrations** et notées $\rightarrowtail$, celles de $\mathscr{F}$ les **fibrations** et notées $\twoheadrightarrow$, et celles de $\mathscr{C} \cap \mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{F} \cap \mathscr{W}$) les cofibrations (resp. fibrations) **acycliques** ou **triviales**.

Définition (Catégorie de modèles)

Une **structure de modèle** sur une catégorie homotopique $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ bicomplète est la donnée de deux classes de morphismes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ telles que $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ et $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ soient des systèmes de factorisation faibles.
Les flèches de $\mathscr{C}$ sont appelées les **cofibrations** et notées $\rightarrowtail$, celles de $\mathscr{F}$ les **fibrations** et notées $\twoheadrightarrow$, et celles de $\mathscr{C} \cap \mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{F} \cap \mathscr{W}$) les cofibrations (resp. fibrations) **acycliques** ou **triviales**.

Remarques

- Une catégorie de modèles est déterminée par deux de ses trois classes de morphismes : clairement $\mathscr{C} = {}^{\perp}(\mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ et $\mathscr{F} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{W})^{\perp}$, et l'on retrouve $\mathscr{W}$ comme la classe des flèches se factorisant comme un morphisme de ${}^{\perp}\mathscr{F}$ suivi d'un morphisme de $\mathscr{C}^{\perp}$.

Catégories de modèles

Définition (Catégorie de modèles)

Une **structure de modèle** sur une catégorie homotopique $(\mathfrak{M}, \mathscr{W})$ bicomplète est la donnée de deux classes de morphismes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ telles que $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ et $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ soient des systèmes de factorisation faibles.
Les flèches de $\mathscr{C}$ sont appelées les **cofibrations** et notées $\rightarrowtail$, celles de $\mathscr{F}$ les **fibrations** et notées $\twoheadrightarrow$, et celles de $\mathscr{C} \cap \mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{F} \cap \mathscr{W}$) les cofibrations (resp. fibrations) **acycliques** ou **triviales**.

Remarques

- Une catégorie de modèles est déterminée par deux de ses trois classes de morphismes : clairement $\mathscr{C} = {}^{\perp}(\mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ et $\mathscr{F} = (\mathscr{C} \cap \mathscr{W})^{\perp}$, et l'on retrouve $\mathscr{W}$ comme la classe des flèches se factorisant comme un morphisme de ${}^{\perp}\mathscr{F}$ suivi d'un morphisme de $\mathscr{C}^{\perp}$.
- On s'intéresse généralement aux catégories de modèles **fermées**, dans lesquelles les deux factorisations sont naturelles.

Exemples

- Il existe une structure de modèle, dite **de Quillen**, sur la catégorie relative des espaces topologiques et équivalences faibles d'homotopie : les fibrations sont les fibrations de Serre et les cofibrations les rétracts d'inclusions cellulaires généralisées ; ainsi tous les objets sont fibrants et les objets cofibrants sont les rétracts de complexes cellulaires.

Exemples

- Il existe une structure de modèle, dite **de Quillen**, sur la catégorie relative des espaces topologiques et équivalences faibles d'homotopie : les fibrations sont les fibrations de Serre et les cofibrations les rétracts d'inclusions cellulaires généralisées ; ainsi tous les objets sont fibrants et les objets cofibrants sont les rétracts de complexes cellulaires.
- Il existe un structure de modèle, dite de Strøm, sur la catégorie relative des espaces topologiques et équivalences d'homotopie ; ses fibrations sont les fibrations de Hurewicz (donc tous les objets sont fibrants) et ses cofibrations les rétracts de cofibrations d'images fermées.

Exemples

- Il existe une structure de modèle, dite **de Quillen**, sur la catégorie relative des espaces topologiques et équivalences faibles d'homotopie : les fibrations sont les fibrations de Serre et les cofibrations les rétracts d'inclusions cellulaires généralisées ; ainsi tous les objets sont fibrants et les objets cofibrants sont les rétracts de complexes cellulaires.

- Il existe un structure de modèle, dite de Strøm, sur la catégorie relative des espaces topologiques et équivalences d'homotopie ; ses fibrations sont les fibrations de Hurewicz (donc tous les objets sont fibrants) et ses cofibrations les rétracts de cofibrations d'images fermées.

- Il existe une structure de modèle, dite **de Kan–Quillen**, sur $\mathfrak{sEns}$ avec les équivalences faibles d'homotopie, dont les fibrations sont les fibrations de Kan (faiblement orthogonales à droite des inclusions de cornets). Ses cofibrations sont exactement les inclusions en tout degré.

Exemples II

- Si une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ a assez de projectifs et d'injectifs, il existe deux structures de modèles, dites **projective** et **injective**, sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$ et dont les équivalences faibles sont les qis.
  La structure projective se retreint également à une structure de modèle sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})_{\leq 0}$; ses fibrations sont les morphismes surjectifs en tout degré (resp. < 0).
  La structure injective se restreint aussi à une structure de modèle sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})_{\geq 0}$; ses cofibrations sont les morphismes injectifs en tout degré (resp. > 0).

Exemples II

- Si une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ a assez de projectifs et d'injectifs, il existe deux structures de modèles, dites **projective** et **injective**, sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$ et dont les équivalences faibles sont les qis.
  La structure projective se retreint également à une structure de modèle sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})_{\leq 0}$; ses fibrations sont les morphismes surjectifs en tout degré (resp. < 0).
  La structure injective se restreint aussi à une structure de modèle sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})_{\geq 0}$; ses cofibrations sont les morphismes injectifs en tout degré (resp. > 0).
- Il existe une structure de modèle, dite canonique, sur $\mathfrak{Cat}$, l'unique dont les équivalences faibles sont les équivalences de catégories. Ses fibrations sont les isofibrations.

Exemples II

- Si une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ a assez de projectifs et d'injectifs, il existe deux structures de modèles, dites **projective** et **injective**, sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})$ et dont les équivalences faibles sont les qis.
  La structure projective se retreint également à une structure de modèle sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})_{\leq 0}$; ses fibrations sont les morphismes surjectifs en tout degré (resp. < 0).
  La structure injective se restreint aussi à une structure de modèle sur $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{A})_{\geq 0}$; ses cofibrations sont les morphismes injectifs en tout degré (resp. > 0).

- Il existe une structure de modèle, dite canonique, sur $\mathfrak{Cat}$, l'unique dont les équivalences faibles sont les équivalences de catégories. Ses fibrations sont les isofibrations.

- Il existe exactement neuf structures de modèles sur $\mathfrak{Ens}$.

Génération cofibrante

Définition

Un système de factorisation faible $(\mathscr{E},\mathscr{M})$ est **cofibrement engendré** s'il existe un *ensemble* $\mathscr{I}$ de flèches de $\mathfrak{M}$ tel que $\mathscr{M}=\mathscr{I}^{\perp}$ et $\mathscr{E}={}^{\perp}(\mathscr{I}^{\perp})$.

Proposition

Les flèches dans ${}^{\perp}(\mathscr{I}^{\perp})$ sont les rétracts de composées transfinies de poussés-en-avant de coproduits de flèches de $\mathscr{I}$.

Une catégorie de modèle $(\mathfrak{M},\mathscr{W},\mathscr{C},\mathscr{F})$ est cofibrement engendrée si les deux systèmes $(\mathscr{C},\mathscr{F}\cap\mathscr{W})$ et $(\mathscr{C}\cap\mathscr{W},\mathscr{F})$ le sont, par des cofibrations (resp. acycliques) génératrices.

Génération cofibrante

Définition

Un système de factorisation faible $(\mathscr{E}, \mathscr{M})$ est **cofibrement engendré** s'il existe un *ensemble* $\mathscr{I}$ de flèches de $\mathfrak{M}$ tel que $\mathscr{M} = \mathscr{I}^{\perp}$ et $\mathscr{E} = {}^{\perp}(\mathscr{I}^{\perp})$.

Proposition

Les flèches dans ${}^{\perp}(\mathscr{I}^{\perp})$ sont les rétracts de composées transfinies de poussés-en-avant de coproduits de flèches de $\mathscr{I}$.

Une catégorie de modèle $(\mathfrak{M}, \mathscr{W}, \mathscr{C}, \mathscr{F})$ est cofibrement engendrée si les deux systèmes $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ et $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ le sont, par des cofibrations (resp. acycliques) génératrices.

Une catégorie $\mathfrak{M}$ est **présentable** si elle est la catégorie d'ind-objets d'une petite catégorie et a toutes les petites colimites.
Une catégorie de modèle est **combinatoire** si elle est présentable et cofibrement engendrée.

Foncteurs de Quillen

Définition (Adjonction de Quillen)

Un foncteur entre catégories de modèles est **de Quillen à gauche** si c'est un adjoint à gauche et qu'il préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques. Il est **de Quillen à droite** s'il est un adjoint à droite et préserve les fibrations et les fubrations acycliques.

Fonceurs de Quillen

Définition (Adjonction de Quillen)

Un foncteur entre catégories de modèles est **de Quillen à gauche** si c'est un adjoint à gauche et qu'il préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques. Il est **de Quillen à droite** s'il est un adjoint à droite et préserve les fibrations et les fubrations acycliques.

Lemme

Soit $\mathscr{F} : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{N} : \mathscr{G}$ une adjonction entre catégories de modèles. Alors $\mathscr{F}$ est de Quillen à gauche si et seulement si $\mathscr{G}$ est de Quillen à droite.

Fonceurs de Quillen

Définition (Adjonction de Quillen)

Un foncteur entre catégories de modèles est **de Quillen à gauche** si c'est un adjoint à gauche et qu'il préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques. Il est **de Quillen à droite** s'il est un adjoint à droite et préserve les fibrations et les fubrations acycliques.

Lemme

Soit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{N}\colon \mathscr{G}$ une adjonction entre catégories de modèles. Alors $\mathscr{F}$ est de Quillen à gauche si et seulement si $\mathscr{G}$ est de Quillen à droite.

Structure de modèle induite par une adjonction

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèles κ-cofibrement engendrée, et soit $\mathscr{L}\colon \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{N}\colon \mathscr{O}$ une adjonction avec $\mathfrak{N}$ bicomplète. Alors $\mathscr{W}_{\mathfrak{N}} = \mathscr{O}^{-1}(\mathscr{W}_{\mathfrak{M}}), \mathscr{F}_{\mathfrak{N}} = \mathscr{O}^{-1}(\mathscr{F}_{\mathfrak{M}})$ et définit une structure de modèle sur $\mathfrak{N}$ si $\mathscr{O}$ préserve les colimites κ-séquentielles et tout morphisme de $\mathfrak{N}$ faiblement orthogonal à gauche à $\mathscr{F}_{\mathfrak{N}}$ est dans $\mathscr{W}_{\mathfrak{N}}$.

Sommaire - Section 5: Catégories de modèles

Résolutions par objets (co)fibrants

Définition (Objet (co)fibrant)

- Un objet $X \in \mathfrak{M}$ est **cofibrant** si le morphisme $\emptyset \to X$ est une cofibration (où $\emptyset$ est initial). Il est **fibrant** si $X \to *$ est une fibration (où $*$ est terminal).

Résolutions par objets (co)fibrants

Définition (Objet (co)fibrant)

- Un objet $X \in \mathfrak{M}$ est **cofibrant** si le morphisme $\emptyset \to X$ est une cofibration (où $\emptyset$ est initial). Il est **fibrant** si $X \to *$ est une fibration (où $*$ est terminal).
- Soit X un objet de $\mathfrak{M}$. Une factorisation $\emptyset \rightarrowtail \mathscr{Q}X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ définit un **remplacement cofibrant** de X. Une factorisation $X \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathscr{R}X \twoheadrightarrow *$ définit un **remplacement fibrant** de X. Si la structure de modèle de $\mathfrak{M}$ est fermée, on obtient ainsi deux endofoncteurs $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ de remplacement cofibrant et fibrant.

Pour tout X, $\mathscr{Q}\mathscr{R}X$ et $\mathscr{R}\mathscr{Q}X$ sont fibrants et cofibrants.

Résolutions par objets (co)fibrants

Définition (Objet (co)fibrant)

- Un objet $X \in \mathfrak{M}$ est **cofibrant** si le morphisme $\emptyset \to X$ est une cofibration (où $\emptyset$ est initial). Il est **fibrant** si $X \to *$ est une fibration (où $*$ est terminal).
- Soit X un objet de $\mathfrak{M}$. Une factorisation $\emptyset \rightarrowtail \mathscr{Q}X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ définit un **remplacement cofibrant** de X. Une factorisation $X \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathscr{R}X \twoheadrightarrow *$ définit un **remplacement fibrant** de X. Si la structure de modèle de $\mathfrak{M}$ est fermée, on obtient ainsi deux endofoncteurs $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ de remplacement cofibrant et fibrant.

Pour tout X, $\mathscr{Q}\mathscr{R}X$ et $\mathscr{R}\mathscr{Q}X$ sont fibrants et cofibrants.

Remarque

Par plus haut, la catégorie d'homotopie d'une catégorie de modèle $\mathfrak{M}$ est équivalente à celle de la sous-catégorie pleine $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}$ sur les objets cofibrants et fibrants.

Le lemme de Brown

Lemme (Brown)

Si $\mathscr{F}$ entre catégories de modèles applique les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors sa restriction aux objets cofibrants est un foncteur relatif.
S'il applique les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors la restriction de $\mathscr{F}$ aux objets fibrants est un foncteur relatif.

Le lemme de Brown

Lemme (Brown)

Si $\mathscr{F}$ entre catégories de modèles applique les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors sa restriction aux objets cofibrants est un foncteur relatif. S'il applique les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors la restriction de $\mathscr{F}$ aux objets fibrants est un foncteur relatif.

Corollaire

Tout foncteur de Quillen à gauche (resp. droite) entre catégories de modèles fermées est résoluble par la gauche (resp. droite) sur les objets cofibrants (resp. fibrants).

Le lemme de Brown

Lemme (Brown)

Si $\mathscr{F}$ entre catégories de modèles applique les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors sa restriction aux objets cofibrants est un foncteur relatif. S'il applique les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors la restriction de $\mathscr{F}$ aux objets fibrants est un foncteur relatif.

Corollaire

Tout foncteur de Quillen à gauche (resp. droite) entre catégories de modèles fermées est résoluble par la gauche (resp. droite) sur les objets cofibrants (resp. fibrants).

Lemme

Tout foncteur de Quillen à gauche admet un foncteur dérivé gauche, et tout foncteur de Quillen à droite admet un foncteur dérivé droit. Les foncteurs dérivés d'une adjonction de Quillen forment une adjonction entre les catégories d'homotopie.

Exemple : le complexe cotangent

Algèbres différentielles graduées commutatives

L'adjonction $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Mod}_{\mathbb{k}})_{\leq 0} \rightleftarrows \mathfrak{adgc}_{\mathbb{k}}$ induit une structure de modèle projective sur $\mathfrak{adgc}_{\mathbb{k}}$.
Les objets cofibrants sont les adgc quasi-libres (d'algèbre graduée sous-jacente libre).

Exemple : le complexe cotangent

Algèbres différentielles graduées commutatives

L'adjonction $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})_{\leq 0} \rightleftarrows \mathfrak{adgc}_{\Bbbk}$ induit une structure de modèle projective sur $\mathfrak{adgc}_{\Bbbk}$.
Les objets cofibrants sont les adgc quasi-libres (d'algèbre graduée sous-jacente libre).

Dérivations et module cotangent

Pour A une $\Bbbk$-algèbre, $\Omega^1_{A/\Bbbk}$ coreprésente $M \mapsto \mathrm{Der}_{\Bbbk}(A, M) = \hom_{\Bbbk,/A}(A, A \oplus M)$.
Ainsi $\Omega^1_{-/\Bbbk}$ est adjoint à gauche de $\mathfrak{AlgMod}_{\Bbbk} \to \mathfrak{Alg}_{\Bbbk}, (A, M) \mapsto A \oplus M$.

Exemple : le complexe cotangent

Algèbres différentielles graduées commutatives

L'adjonction $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})_{\leq 0} \rightleftarrows \mathfrak{adgc}_{\Bbbk}$ induit une structure de modèle projective sur $\mathfrak{adgc}_{\Bbbk}$.
Les objets cofibrants sont les adgc quasi-libres (d'algèbre graduée sous-jacente libre).

Dérivations et module cotangent

Pour A une $\Bbbk$-algèbre, $\Omega^1_{A/\Bbbk}$ coreprésente $M \mapsto \mathrm{Der}_{\Bbbk}(A, M) = \hom_{\Bbbk,/A}(A, A \oplus M)$.
Ainsi $\Omega^1_{-/\Bbbk}$ est adjoint à gauche de $\mathfrak{AlgMod}_{\Bbbk} \to \mathfrak{Alg}_{\Bbbk}, (A, M) \mapsto A \oplus M$.

Le foncteur de complexe cotangent est $\mathbb{L}\Omega^1_{-/\Bbbk}$; il est calculé en prenant des résolutions libres :

$$\mathbb{L}\Omega^1_{A/\Bbbk} = \Omega^1_{Q^\bullet(A)/\Bbbk} \otimes_{Q^\bullet(A)} A$$

où $Q^\bullet(A)$ est une résolution libre de A, *e.g.* la résolution standard venant de l'objet simplicial $Q_n(A) = \mathrm{Sym}_{\Bbbk}(\mathrm{Sym}_{\Bbbk}(\cdots \mathrm{Sym}_{\Bbbk}(A)))$.

Exemple : limites homotopiques

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie bicomplète, et soit $\mathfrak{I}$ une petite catégorie ; $\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$ est la catégorie des diagrammes dans $\mathfrak{M}$ de forme $\mathfrak{I}$. On a un foncteur $\Delta\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$, appliquant M sur le diagramme constant $\Delta_M\colon (I \to J) \mapsto (M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M)$.

Pour tout $\mathscr{D}\colon \mathfrak{I} \to \mathfrak{M}$, une transformation $\Delta_M \Rightarrow \mathscr{D}$ encode exactement la donnée d'un cône sur $\mathscr{D}$ de sommet M, tandis que $\mathscr{D} \Rightarrow \Delta_M$ correspond à un cocône sous $\mathscr{D}$ de sommet M. Ainsi Δ admet des adjoints à droite et à gauche, donnés respectivement par les foncteurs $\lim_{\mathfrak{I}}$ et $\operatorname{colim}_{\mathfrak{I}}$.

Exemple : limites homotopiques

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie bicomplète, et soit $\mathfrak{I}$ une petite catégorie ; $\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$ est la catégorie des diagrammes dans $\mathfrak{M}$ de forme $\mathfrak{I}$. On a un foncteur $\Delta\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$, appliquant M sur le diagramme constant $\Delta_M\colon (I \to J) \mapsto (M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M)$.

Pour tout $\mathscr{D}\colon \mathfrak{I} \to \mathfrak{M}$, une transformation $\Delta_M \Rightarrow \mathscr{D}$ encode exactement la donnée d'un cône sur $\mathscr{D}$ de sommet M, tandis que $\mathscr{D} \Rightarrow \Delta_M$ correspond à un cocône sous $\mathscr{D}$ de sommet M. Ainsi Δ admet des adjoints à droite et à gauche, donnés respectivement par les foncteurs $\lim_{\mathfrak{I}}$ et $\mathrm{colim}_{\mathfrak{I}}$.

Supposons $\mathfrak{M}$ munie d'une structure de modèle $(\mathscr{W}, \mathscr{C}, \mathscr{F})$; on munit $\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$ de $\mathscr{W}^{\mathfrak{I}}$, $\mathscr{C}^{\mathfrak{I}}$ et $\mathscr{F}^{\mathfrak{I}}$. Si $\mathfrak{I}$ est très petite, ou si $\mathfrak{M}$ est combinatoire, on obtient des structures de modèles projective $({}^{\perp}(\mathscr{F}^{\mathfrak{I}} \cap \mathscr{W}^{\mathfrak{I}}), \mathscr{F}^{\mathfrak{I}})$ et injective $(\mathscr{C}^{\mathfrak{I}}, (\mathscr{C}^{\mathfrak{I}} \cap \mathscr{W}^{\mathfrak{I}})^{\perp})$ sur $(\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}, \mathscr{W}^{\mathfrak{I}})$.

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie bicomplète, et soit $\mathfrak{I}$ une petite catégorie ; $\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$ est la catégorie des diagrammes dans $\mathfrak{M}$ de forme $\mathfrak{I}$. On a un foncteur $\Delta\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$, appliquant M sur le diagramme constant $\Delta_M\colon (I \to J) \mapsto (M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M)$.

Pour tout $\mathscr{D}\colon \mathfrak{I} \to \mathfrak{M}$, une transformation $\Delta_M \Rightarrow \mathscr{D}$ encode exactement la donnée d'un cône sur $\mathscr{D}$ de sommet M, tandis que $\mathscr{D} \Rightarrow \Delta_M$ correspond à un cocône sous $\mathscr{D}$ de sommet M. Ainsi Δ admet des adjoints à droite et à gauche, donnés respectivement par les foncteurs $\lim_{\mathfrak{I}}$ et $\operatorname{colim}_{\mathfrak{I}}$.

Supposons $\mathfrak{M}$ munie d'une structure de modèle $(\mathscr{W}, \mathscr{C}, \mathscr{F})$; on munit $\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}$ de $\mathscr{W}^{\mathfrak{I}}$, $\mathscr{C}^{\mathfrak{I}}$ et $\mathscr{F}^{\mathfrak{I}}$.
Si $\mathfrak{I}$ est très petite, ou si $\mathfrak{M}$ est combinatoire, on obtient des structures de modèles projective $({}^{\perp}(\mathscr{F}^{\mathfrak{I}} \cap \mathscr{W}^{\mathfrak{I}}), \mathscr{F}^{\mathfrak{I}})$ et injective $(\mathscr{C}^{\mathfrak{I}}, (\mathscr{C}^{\mathfrak{I}} \cap \mathscr{W}^{\mathfrak{I}})^{\perp})$ sur $(\mathfrak{M}^{\mathfrak{I}}, \mathscr{W}^{\mathfrak{I}})$.
Dans ce cas les adjonctions $\operatorname{colim}_{\mathfrak{I}} \dashv \Delta$ et $\Delta \dashv \lim_{\mathfrak{I}}$ sont de Quillen, et on en déduit l'existence des foncteurs dérivés $\mathbb{L} \operatorname{colim}_{\mathfrak{I}}$ et $\mathbb{R} \lim_{\mathfrak{I}}$, appelés colimites et limites homotopiques.

Équivalences de Quillen

Définition

Une adjonction de Quillen est une **équivalence de Quillen** si l'adjonction induite par les foncteurs dérivés est une équivalence entre les catégories d'homotopie.

Équivalences de Quillen

Définition

Une adjonction de Quillen est une **équivalence de Quillen** si l'adjonction induite par les foncteurs dérivés est une équivalence entre les catégories d'homotopie.

Exemples

- L'adjonction $|-|\colon \mathfrak{sEns} \rightleftarrows \mathfrak{Top}\colon \mathrm{Sing}$ induit une équivalence de Quillen entre la structure de modèle de Quillen et la structure de modèle de Kan–Quillen.
- Si une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ est concrète et $\mathfrak{A} \to \mathfrak{Ens}$ admet un adjoint à gauche, l'adjonction induit une structure de modèle de Kan–Quillen sur $\mathfrak{sA}$. Par la correspondance de Dold–Kan, l'adjonction $\Gamma\colon \mathfrak{Ch}^{\leq 0}(\mathfrak{A}) \rightleftarrows \mathfrak{sA}\colon M$ induit une équivalence de Quillen entre la structure de Kan–Quillen et la structure de modèle projective.

Soit X un objet d'une catégorie de modèle.

- Un **objet cylindre** de X est un objet $X \times I$ apparaissant dans une factorisation $\mathrm{id}_X \amalg \mathrm{id}_X : X \amalg X \rightarrowtail X \times I \xrightarrow{\sim} X$.
- Un **objet en chemins** de X est un objet X^I apparaissant dans une factorisation $\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X : X \xrightarrow{\sim} X^I \twoheadrightarrow X \times X$.

Soit X un objet d'une catégorie de modèle.

- Un **objet cylindre** de X est un objet $X \times I$ apparaissant dans une factorisation $\mathrm{id}_X \amalg \mathrm{id}_X : X \amalg X \rightarrowtail X \times I \xrightarrow{\sim} X$.
- Un **objet en chemins** de X est un objet X^I apparaissant dans une factorisation $\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X : X \xrightarrow{\sim} X^I \twoheadrightarrow X \times X$.
- On note $i_0, i_1 : X \to X \amalg X \to X \times I$ et $p_0, p_1 : X^I \to X \times X \to X$ les applications canoniques. Une **homotopie à gauche** entre deux flèches parallèles $f, g : X \rightrightarrows Y$ est une flèche $h : X \times I \to Y$ telle que $h \circ i_0 = f$ et $h \circ i_1 = g$.

Soit X un objet d'une catégorie de modèle.

- Un **objet cylindre** de X est un objet $X \times I$ apparaissant dans une factorisation $\mathrm{id}_X \amalg \mathrm{id}_X \colon X \amalg X \rightarrowtail X \times I \xrightarrow{\sim} X$.
- Un **objet en chemins** de X est un objet X^I apparaissant dans une factorisation $\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X \colon X \xrightarrow{\sim} X^I \twoheadrightarrow X \times X$.
- On note $i_0, i_1 \colon X \to X \amalg X \to X \times I$ et $p_0, p_1 \colon X^I \to X \times X \to X$ les applications canoniques. Une **homotopie à gauche** entre deux flèches parallèles $f, g \colon X \rightrightarrows Y$ est une flèche $h \colon X \times I \to Y$ telle que $h \circ i_0 = f$ et $h \circ i_1 = g$. Une **homotopie à droite** entre f et g est une flèche $k \colon X \to Y^I$ telle que $p_0 \circ k = f$ et $p_1 \circ k = g$. On dit que f et g sont **homotopes**, et on le note $f \simeq g$, s'il existe une homotopie à droite et une homotopie à gauche entre elles.
- Une flèche $f \colon X \to Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g \colon Y \to X$ telle que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ et $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Présentation de la catégorie d'homotopie II

Lemme

Si X est cofibrant et Y est fibrant, la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $\hom(X, Y)$, et revient à l'existence d'une homotopie à gauche *ou* d'une homotopie à droite. En particulier, on obtient une relation d'équivalence $(\simeq)$ sur (les hom-ensembles de) $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}$.

Présentation de la catégorie d'homotopie II

Lemme

Si X est cofibrant et Y est fibrant, la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $\hom(X, Y)$, et revient à l'existence d'une homotopie à gauche *ou* d'une homotopie à droite. En particulier, on obtient une relation d'équivalence $(\simeq)$ sur (les hom-ensembles de) $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}$.

Proposition (Théorème de Whitehead pour les catégories de modèles)

Une flèche dans $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}$ est une équivalence faible ssi c'est une équivalence d'homotopie.

Présentation de la catégorie d'homotopie II

Lemme

Si X est cofibrant et Y est fibrant, la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $\hom(X, Y)$, et revient à l'existence d'une homotopie à gauche *ou* d'une homotopie à droite.
En particulier, on obtient une relation d'équivalence $(\simeq)$ sur (les hom-ensembles de) $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}$.

Proposition (Théorème de Whitehead pour les catégories de modèles)

Une flèche dans $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}$ est une équivalence faible ssi c'est une équivalence d'homotopie.

Théorème

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie de modèle fermée. Alors $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}} \hookrightarrow \mathfrak{M}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}/(\simeq)$ et $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M}_{\mathrm{cf}}) = \mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$.
Si $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ sont les foncteurs de remplacements cofibrant et fibrant pour $\mathfrak{M}$, on a pour tous $X, Y \in \mathfrak{M}$ des isomorphismes naturels $\hom_{\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})}(X, Y) \xrightarrow{\simeq} \hom_{\mathfrak{M}}(\mathscr{Q}X, \mathscr{R}Y)/(\simeq)$.

Troisième partie : Catégories supérieures

Sommaire - Section 6: Des modèles pour les ∞-catégories

∞-groupoïdes

Lemme (Dugger, Hypothèse d'homotopie de Grothendieck)

$\mathfrak{CatMod}$ = catégorie des catégories de modèles fermées avec $\hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \left\{\mathfrak{M} \overset{\text{Quillen}}{\rightleftarrows} \mathfrak{N}\right\}$).
Soit $\mathcal{O}\colon \mathfrak{CatMod} \to \mathfrak{Cat}$ le foncteur évident oubliant sur les objets la structure de modèle et sur les morphismes l'adjoint à droite.

∞-groupoïdes

Lemme (Dugger, Hypothèse d'homotopie de Grothendieck)

$\mathfrak{CatMod}$ = catégorie des catégories de modèles fermées avec $\hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \left\{\mathfrak{M} \overset{\text{Quillen}}{\rightleftarrows} \mathfrak{N}\right\}$).
Soit $\mathscr{O}\colon \mathfrak{CatMod} \to \mathfrak{Cat}$ le foncteur évident oubliant sur les objets la structure de modèle et sur les morphismes l'adjoint à droite.
$\mathscr{O}$ a un adjoint à gauche $\mathscr{Y}$, engendrant librement une catégorie de modèle (homotopiquement cocomplète) : pour toute catégorie $\mathfrak{C}$, $\mathscr{Y}(\mathfrak{C})$ est $\mathfrak{sEns}^{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}}$ avec la structure de Kan–Quillen terme-à-terme.

- La théorie d'homotopie universelle engendrée par $*$ est $\mathfrak{sEns}_{\text{Kan–Quillen}}$, dont la catégorie d'homotopie mérite donc le nom de catégorie d'homotopie des ∞-groupoïdes.

∞-groupoïdes

Lemme (Dugger, Hypothèse d'homotopie de Grothendieck)

$\mathfrak{CatMod}$ = catégorie des catégories de modèles fermées avec $\hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \left\{\mathfrak{M} \overset{\text{Quillen}}{\rightleftarrows} \mathfrak{N}\right\}$).
Soit $\mathscr{O}\colon \mathfrak{CatMod} \to \mathfrak{Cat}$ le foncteur évident oubliant sur les objets la structure de modèle et sur les morphismes l'adjoint à droite.
$\mathscr{O}$ a un adjoint à gauche $\mathscr{Y}$, engendrant librement une catégorie de modèle (homotopiquement cocomplète) : pour toute catégorie $\mathfrak{C}$, $\mathscr{Y}(\mathfrak{C})$ est $\mathfrak{sEns}^{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}}$ avec la structure de Kan–Quillen terme-à-terme.

- La théorie d'homotopie universelle engendrée par $*$ est $\mathfrak{sEns}_{\text{Kan–Quillen}}$, dont la catégorie d'homotopie mérite donc le nom de catégorie d'homotopie des ∞-groupoïdes.
- On peut penser à une catégorie enrichie en complexes de Kan comme à une catégorie avec des ∞-groupoïdes de morphismes, c'est-à-dire une $(\infty, 1)$-catégorie avec composition stricte. On note $\mathfrak{Cat}_{\mathfrak{sEns}}$ la catégorie des $\mathfrak{sEns}$-catégories.

Théorème (Bergner)

Il existe une structure de modèle sur $\mathfrak{Cat}_{s\mathfrak{Ens}}$ dont

- les équivalences faibles, appelées **équivalences de Dwyer–Kan** ou **DK-équivalences**, sont les $s\mathfrak{Ens}$-foncteurs essentiellement surjectifs induisant des équivalences faibles d'homotopie entre hom-ensembles simpliciaux, et

$(\infty, 1)$-catégories

Lemme (Joyal)

Une structure de modèle est déterminée par ses équivalences faibles et ses objets fibrants.

Théorème (Bergner)

Il existe une structure de modèle sur $\mathfrak{Cat}_{\mathfrak{sEns}}$ dont

- les équivalences faibles, appelées **équivalences de Dwyer–Kan** ou **DK-équivalences**, sont les $\mathfrak{sEns}$-foncteurs essentiellement surjectifs induisant des équivalences faibles d'homotopie entre hom-ensembles simpliciaux, et
- les objets fibrants sont les $\mathfrak{sEns}$-catégories dont tous les hom-ensembles simpliciaux sont des complexes de Kan.

$(\infty, 1)$-catégories

Lemme (Joyal)

Une structure de modèle est déterminée par ses équivalences faibles et ses objets fibrants.

Théorème (Bergner)

Il existe une structure de modèle sur $\mathfrak{Cat}_{s\mathfrak{Ens}}$ dont

- les équivalences faibles, appelées **équivalences de Dwyer–Kan** ou **DK-équivalences**, sont les $s\mathfrak{Ens}$-foncteurs essentiellement surjectifs induisant des équivalences faibles d'homotopie entre hom-ensembles simpliciaux, et
- les objets fibrants sont les $s\mathfrak{Ens}$-catégories dont tous les hom-ensembles simpliciaux sont des complexes de Kan.

Définition ($(\infty, 1)$-catégories)

$\mathrm{Ho}(\mathfrak{Cat}_{s\mathfrak{Ens},\mathrm{Bergner}})$ est appelée la **catégorie d'homotopie des $(\infty, 1)$-catégories**.

Soit $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ une 1-catégorie relative. Sa **localisation en hamac** est la catégorie $\mathfrak{sEns}$-enrichie $\mathfrak{Ham}_{\mathscr{W}}(\mathfrak{C})$ dont les objets sont ceux de $\mathfrak{C}$ et $\hom_{\mathfrak{Ham}_{\mathscr{W}}(\mathfrak{C})}(X, Y)_n$ est l'ensemble des diagrammes (dits « hamacs »)

$$\begin{tikzcd}
 & X_{0,0} \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & X_{0,1} \arrow[l, "\in\mathscr{W}"'] \arrow[r] \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & \cdots \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & X_{0,m-1} \arrow[l, "\in\mathscr{W}"'] \arrow[r] \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & X_{0,m} \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & \\
X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \vdots \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & \vdots \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & \vdots \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & \vdots \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & \vdots \arrow[d, "\in\mathscr{W}"] & Y \arrow[ul, "\in\mathscr{W}"'] \arrow[l] \arrow[dl, "\in\mathscr{W}"] \\
 & X_{n,0} & X_{n,1} \arrow[l, "\in\mathscr{W}"] \arrow[r] & \cdots & X_{n,m-1} \arrow[l, "\in\mathscr{W}"] \arrow[r] & X_{n,m} &
\end{tikzcd}$$

($m \geq 1$ fixé au sein d'un hamac), avec les morphismes de faces et dégénérescences évidents. Cette $\mathfrak{sEns}$-catégorie est fibrante pour la structure de modèle de Bergner.

Définition (Localisation ∞-catégorique)

Soient $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie et $\mathscr{W}$ une classe de 1-morphismes de $\mathfrak{C}$. Une localisation de $\mathfrak{C}$ le long de $\mathscr{W}$ est un $(\infty, 1)$-foncteur $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$ tel que pour toute $(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{D}$, $\mathscr{L}^*$ induit une équivalence entre $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!], \mathfrak{D})$ et $\mathfrak{Fonc}_{\mathscr{W} \to \simeq}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$.

Lemme

Soit $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ une 1-catégorie relative. $\mathfrak{Ham}_{\mathscr{W}}(\mathfrak{C})$ vérifie la propriété universelle de $\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$.

Catégories relatives et $(\infty, 1)$-catégories II

Définition (Localisation ∞-catégorique)

Soient $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie et $\mathscr{W}$ une classe de 1-morphismes de $\mathfrak{C}$. Une localisation de $\mathfrak{C}$ le long de $\mathscr{W}$ est un $(\infty, 1)$-foncteur $\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$ tel que pour toute $(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{D}$, $\mathscr{L}^*$ induit une équivalence entre $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!], \mathfrak{D})$ et $\mathfrak{Fonc}_{\mathscr{W} \to \simeq}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$.

Lemme

Soit $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ une 1-catégorie relative. $\mathfrak{Ham}_{\mathscr{W}}(\mathfrak{C})$ vérifie la propriété universelle de $\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$.

Proposition (Dwyer–Kan)

Toute $s\mathfrak{Ens}$-catégorie est DK-équivalente à l'∞-localisation d'une catégorie relative.

Catégories relatives et $(\infty, 1)$-catégories II

Définition (Localisation ∞-catégorique)

Soient $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie et $\mathscr{W}$ une classe de 1-morphismes de $\mathfrak{C}$. Une localisation de $\mathfrak{C}$ le long de $\mathscr{W}$ est un $(\infty, 1)$-foncteur $\mathscr{L} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$ tel que pour toute $(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{D}$, $\mathscr{L}^*$ induit une équivalence entre $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!], \mathfrak{D})$ et $\mathfrak{Fonc}_{\mathscr{W} \to \simeq}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$.

Lemme

Soit $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ une 1-catégorie relative. $\mathfrak{Ham}_{\mathscr{W}}(\mathfrak{C})$ vérifie la propriété universelle de $\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$.

Proposition (Dwyer–Kan)

Toute $\mathfrak{sEns}$-catégorie est DK-équivalente à l'∞-localisation d'une catégorie relative.

Proposition

Supposons que $(\mathfrak{C}, \mathscr{W})$ a un $\mathfrak{sEns}$-enrichissement et une structure de modèle compatible. Alors $\mathfrak{C}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!]$ est DK-équivalente à la sous-$\mathfrak{sEns}$-catégorie pleine $\mathfrak{C}_{\mathrm{cf}}$.

Sommaire - Section 6: Des modèles pour les ∞-catégories

- L'adjonction $\mathfrak{Graphes} \rightleftarrows \mathfrak{Cat}$ induit une comonade $\mathscr{T}$ sur $\mathfrak{Cat}$, c'est-à-dire un comonoïde dans la catégorie monoïdale strictes d'endofoncteurs $\mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$.
- Par propriété universelle de la catégorie monoïdale stricte munie d'un comonoïde $({\Delta_{\mathrm{a}}}^{\mathrm{op}}, \oplus, [0])$, elle corresond à $\mathscr{Bar}(\mathscr{T})_\bullet \colon {\Delta_{\mathrm{a}}}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$, un objet simplicial (augmenté) dans $\mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$.

- L'adjonction $\mathfrak{Graphes} \rightleftarrows \mathfrak{Cat}$ induit une comonade $\mathscr{T}$ sur $\mathfrak{Cat}$, c'est-à-dire un comonoïde dans la catégorie monoïdale strictes d'endofoncteurs $\mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$.
- Par propriété universelle de la catégorie monoïdale stricte munie d'un comonoïde $({\Delta_a}^{op}, \oplus, [0])$, elle corresond à $\mathscr{Bar}(\mathscr{T})_\bullet \colon {\Delta_a}^{op} \to \mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$, un objet simplicial (augmenté) dans $\mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$.
- Par adjonction, on le voit comme $\mathscr{Bar}(\mathscr{T})_\bullet(-) \colon \mathfrak{Cat} \to \mathfrak{Cat}^{{\Delta_a}^{op}} = \mathfrak{s}_a\mathfrak{Cat}$.

- L'adjonction $\mathfrak{Graphes} \rightleftarrows \mathfrak{Cat}$ induit une comonade $\mathscr{T}$ sur $\mathfrak{Cat}$, c'est-à-dire un comonoïde dans la catégorie monoïdale strictes d'endofoncteurs $\mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$.
- Par propriété universelle de la catégorie monoïdale stricte munie d'un comonoïde $({\Delta_a}^{op}, \oplus, [0])$, elle corresond à $\mathscr{Bar}(\mathscr{T})_\bullet \colon {\Delta_a}^{op} \to \mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$, un objet simplicial (augmenté) dans $\mathfrak{Cat}^{\mathfrak{Cat}}$.
- Par adjonction, on le voit comme $\mathscr{Bar}(\mathscr{T})_\bullet(-) \colon \mathfrak{Cat} \to \mathfrak{Cat}^{{\Delta_a}^{op}} = \mathfrak{s}_a\mathfrak{Cat}$.

Remarque : Catégories simpliciales et catégories simplicialement enrichies

Soit $\mathfrak{C}$ une $\mathfrak{sEns}$-catégorie. On lui associe $\underline{\mathfrak{C}}_\bullet \in \mathfrak{sCat}$ où $\mathrm{Ob}(\underline{\mathfrak{C}}_n) = \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ et $\hom_{\underline{\mathfrak{C}}_n}(C, D) = \hom_{\mathfrak{C}}(C, D)_n$. $\rightsquigarrow$ Équivalence $\mathfrak{sEns} - \mathfrak{Cat} \simeq \{\mathfrak{X}_\bullet \in \mathfrak{sCat} \mid \mathrm{Ob}(\mathfrak{X}_\bullet) \text{ constant}\}$.

Comme $\mathscr{T}$ agit par l'identité sur les objets de $\mathfrak{Cat}$, pour toute catégorie $\mathfrak{C}$ la catégorie simpliciale $\mathscr{Bar}(\mathscr{T})_\bullet(\mathfrak{C})$ donne une $\mathfrak{sEns}$-catégorie, notée $\mathfrak{C}^+$.

Nerf et réalisation homotopiquement cohérents II

Pour toute $\mathfrak{sEns}$-catégorie $\mathfrak{D}$, un $\mathfrak{sEns}$-foncteur $\mathfrak{C}^+ \to \mathfrak{D}$ est appelé un diagramme homotopiquement cohérent de forme $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{D}$.

Construction

On définit un foncteur $\varpi_\infty \colon \mathbb{\Delta} \to \mathfrak{Cat}_{\mathfrak{sEns}}$ en appliquant $[n]$ sur $\varpi_\infty(\Delta^n_\bullet) \coloneqq [n]^+$ (où $[n]$ est vu comme une catégorie).

Nerf et réalisation homotopiquement cohérents II

Pour toute $\mathfrak{sEns}$-catégorie $\mathfrak{D}$, un $\mathfrak{sEns}$-foncteur $\mathfrak{C}^+ \to \mathfrak{D}$ est appelé un diagramme homotopiquement cohérent de forme $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{D}$.

Construction

On définit un foncteur $\varpi_\infty \colon \mathbb{\Delta} \to \mathfrak{Cat}_{\mathfrak{sEns}}$ en appliquant $[n]$ sur $\varpi_\infty(\Delta^n_\bullet) \coloneqq [n]^+$ (où $[n]$ est vu comme une catégorie).
On en déduit une adjonction de réalisation géométrique et nerf $\varpi_\infty \colon \mathfrak{sEns} \rightleftarrows \mathfrak{Cat}_{\mathfrak{sEns}} \colon \mathscr{N}_{\mathbb{\Delta}}$; le foncteur ϖ_∞ est appelé le foncteur d'$(\infty, 1)$-catégorie fondamentale, tandis que $\mathscr{N}_{\mathbb{\Delta}}$ est le foncteur de **nerf homotopiquement cohérent**.

Remarquons que pour toute $\mathfrak{sEns}$-catégorie $\mathfrak{C}$ l'on a

$$\mathscr{N}_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{C})_n = \hom_{\mathfrak{Cat}_{\mathfrak{sEns}}}(\varpi_\infty(\Delta^n_\bullet) = [n]^+, \mathfrak{C}),$$

qui est l'ensemble des chaînes de n morphismes homotopiquement composables dans $\mathfrak{C}$.

Proposition (Joyal, Lurie)

Il existe une structure de modèle, appelée la **structure de modèle de Joyal**, sur $\mathfrak{sEns}$ telle que $\varpi_\infty \dashv \mathscr{N}_\Delta$ soit une équivalence de Quillen.

Les équivalences faibles sont appelées **équivalences catégoriques**.

Quasi-catégories

Proposition (Joyal, Lurie)

Il existe une structure de modèle, appelée la **structure de modèle de Joyal**, sur $\mathfrak{sEns}$ telle que $\varpi_\infty \dashv \mathscr{N}_\Delta$ soit une équivalence de Quillen. Tous les objets sont cofibrants, et les objets fibrants sont les **complexes de Kan intérieurs** ou **faibles**, aussi appelés **quasi-catégories**, les ensembles simpliciaux vérifiant la condition de Kan intérieure, c'est-à-dire la condition d'orthogonalité faible à droite des morphismes $\Lambda^n_{k,\bullet} \hookrightarrow \Delta^n_\bullet, 0 < k < n$.

Les équivalences faibles sont appelées **équivalences catégoriques**. Une quasi-catégorie est donc un ensemble simplicial équivalent au $\mathscr{N}_\Delta$ d'une $\mathfrak{sEns}$-catégorie Bergner-fibrante.

Le nerf d'une catégorie est une quasi-catégorie, de même qu'un complexe de Kan.

Quasi-catégories

Proposition (Joyal, Lurie)

Il existe une structure de modèle, appelée la **structure de modèle de Joyal**, sur $\mathfrak{sEns}$ telle que $\varpi_\infty \dashv \mathscr{N}_\Delta$ soit une équivalence de Quillen. Tous les objets sont cofibrants, et les objets fibrants sont les **complexes de Kan intérieurs** ou **faibles**, aussi appelés **quasi-catégories**, les ensembles simpliciaux vérifiant la condition de Kan intérieure, c'est-à-dire la condition d'orthogonalité faible à droite des morphismes $\Lambda^n_{k,\bullet} \hookrightarrow \Delta^n_\bullet, 0 < k < n$.

Les équivalences faibles sont appelées **équivalences catégoriques**. Une quasi-catégorie est donc un ensemble simplicial équivalent au $\mathscr{N}_\Delta$ d'une $\mathfrak{sEns}$-catégorie Bergner-fibrante.

Le nerf d'une catégorie est une quasi-catégorie, de même qu'un complexe de Kan.

Corollaire (Présentations)

Soit $\mathfrak{C}$ une quasi-catégorie vérifiant des hypothèses de présentabilité. Alors il existe une catégorie de modèle simpliciale cofibrement engendrée $\mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{C} \simeq \mathscr{N}_\Delta(\mathfrak{M}[\![\mathscr{W}^{-1}]\!])$.

$(\infty, 1)$-foncteurs

Lemme

Soient $C_\bullet$ une quasi-catégorie et $A_\bullet$ un ensemble simplicial. Le hom interne $\underline{\hom}_\bullet(A_\bullet, C_\bullet)$ est une quasi-catégorie.

Définition

Soient $C_\bullet = \mathscr{N}_\Delta(\mathfrak{C}), D_\bullet = \mathscr{N}_\Delta(\mathfrak{D})$ deux quasi-catégories. La quasi-catégorie $\underline{\hom}_\bullet(C_\bullet, D_\bullet)$ est notée $\mathscr{N}_\Delta(\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}))$ et définit ainsi l'$(\infty, 1)$-catégorie des $(\infty, 1)$-foncteurs de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}$.

Transformations naturelles d'$(\infty, 1)$-foncteurs

Un 1-simplexe de $\mathscr{N}_\Delta(\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}))$ est un morphisme $C_\bullet \times \Delta^1_\bullet \to D_\bullet$.
On a $\Delta^1_\bullet = N(\mathbb{2})_\bullet = \mathscr{N}_\Delta(\mathbb{2})_\bullet$, donc on retrouve les transformations naturelles.

Si $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont deux ensembles simpliciaux, leur **joint** est l'ensemble simplicial $(X \star Y)_\bullet$ avec $(X \star Y)_n = X_n \cup Y_n \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} X_i Y_{n-1-i}$.

Proposition

Si $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont deux quasi-catégories, leur joint en est aussi une.

Si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ sont deux catégories, leur joint est la catégorie $\mathfrak{C} \star \mathfrak{D}$ d'objets $\mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \amalg \mathrm{obj}(\mathfrak{D})$ et avec $\hom_{\mathfrak{C}\star\mathfrak{D}}(C, C') = \hom_{\mathfrak{C}}(C, C')$, $\hom_{\mathfrak{C}\star\mathfrak{D}}(D, D') = \hom_{\mathfrak{D}}(D, D')$, $\hom_{\mathfrak{C}\star\mathfrak{D}}(C, D) = *$, et $\hom_{\mathfrak{C}\star\mathfrak{D}}(D, C) = \emptyset$ si $C, C' \in \mathfrak{C}$ et $D, D' \in \mathfrak{D}$.
On a $N(\mathfrak{C}) \star N(\mathfrak{D}) \simeq N(\mathfrak{C} \star \mathfrak{D})$.

Si $C_\bullet$ est une quasi-catégorie, on définit la quasi-catégorie des cônes sur $C_\bullet$ (resp. cocônes sous $C_\bullet$) comme ${}^{\triangleleft}C_\bullet = \Delta^0_\bullet \star C_\bullet$ (resp. $C_\bullet^{\triangleright} = C_\bullet \star \Delta^0_\bullet$).

Limites dans les catégories supérieures II

$\mathscr{F}\colon \mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ un $(\infty,1)$-foncteur. L'$(\infty,1)$-catégorie $\mathfrak{D}_{\triangleleft/\mathscr{F}}$ des cônes sur $\mathscr{F}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\triangleright}$ des cocônes sous $\mathscr{F}$) est déterminée par $\hom(\mathfrak{K},\mathfrak{D}_{\triangleleft/\mathscr{F}}) = \{\mathscr{L}\colon \mathfrak{K}\star\mathfrak{C}\to\mathfrak{D} \mid \mathscr{L}|_{\mathfrak{C}} = \mathscr{F}\}$ (resp. $\hom(\mathfrak{K},\mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\triangleright}) = \{\mathscr{L}\colon \mathfrak{C}\star\mathfrak{K}\to\mathfrak{D} \mid \mathscr{L}|_{\mathfrak{C}} = \mathscr{F}\}$).

Limites dans les catégories supérieures II

$\mathscr{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un $(\infty, 1)$-foncteur. L'$(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{D}_{\triangleleft/\mathscr{F}}$ des cônes sur $\mathscr{F}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\triangleright}$ des cocônes sous $\mathscr{F}$) est déterminée par $\hom(\mathfrak{K}, \mathfrak{D}_{\triangleleft/\mathscr{F}}) = \{\mathscr{L}: \mathfrak{K} \star \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \mid \mathscr{L}|_{\mathfrak{C}} = \mathscr{F}\}$ (resp. $\hom(\mathfrak{K}, \mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\triangleright}) = \{\mathscr{L}: \mathfrak{C} \star \mathfrak{K} \to \mathfrak{D} \mid \mathscr{L}|_{\mathfrak{C}} = \mathscr{F}\}$).

Définition (Objets universels et (co)limites)

- Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie. Un objet $\emptyset \in \mathfrak{C}$ est **initial** si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, l'∞-groupoïde $\hom(\emptyset, C)$ est contractile (*i.e.* équivalent au point). Un objet $* \in \mathfrak{C}$ est **terminal** si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, $\hom(C, *)$ est un ∞-groupoïde contractile.
- Soit $\mathscr{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un $(\infty, 1)$-foncteur. Une $(\infty, 1)$**-limite** de $\mathscr{F}$ est un objet terminal de $\mathfrak{D}_{\triangleleft/\mathscr{F}}$. Une $(\infty, 1)$**-colimite** de $\mathscr{F}$ est un objet initial de $\mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\triangleright}$.

Limites dans les catégories supérieures II

$\mathscr{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un $(\infty,1)$-foncteur. L'$(\infty,1)$-catégorie $\mathfrak{D}_{\lhd/\mathscr{F}}$ des cônes sur $\mathscr{F}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\rhd}$ des cocônes sous $\mathscr{F}$) est déterminée par $\hom(\mathfrak{K}, \mathfrak{D}_{\lhd/\mathscr{F}}) = \{\mathscr{L}\colon \mathfrak{K} \star \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \mid \mathscr{L}|_{\mathfrak{C}} = \mathscr{F}\}$ (resp. $\hom(\mathfrak{K}, \mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\rhd}) = \{\mathscr{L}\colon \mathfrak{C} \star \mathfrak{K} \to \mathfrak{D} \mid \mathscr{L}|_{\mathfrak{C}} = \mathscr{F}\}$).

Définition (Objets universels et (co)limites)

- Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty,1)$-catégorie. Un objet $\emptyset \in \mathfrak{C}$ est **initial** si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, l'∞-groupoïde $\hom(\emptyset, C)$ est contractile (*i.e.* équivalent au point). Un objet $* \in \mathfrak{C}$ est **terminal** si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, $\hom(C, *)$ est un ∞-groupoïde contractile.
- Soit $\mathscr{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un $(\infty,1)$-foncteur. Une $(\infty,1)$**-limite** de $\mathscr{F}$ est un objet terminal de $\mathfrak{D}_{\lhd/\mathscr{F}}$. Une $(\infty,1)$**-colimite** de $\mathscr{F}$ est un objet initial de $\mathfrak{D}^{\mathscr{F}/\rhd}$.

Théorème

Les (co)limites homotopiques calculent les ∞-(co)limites.

Définition (Fibre et cofibre)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie admettant un objet terminal $*$. Une **cofibre** d'un morphisme $f \colon X \to Y$ de $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$ colimite du diagramme $* \xleftarrow{!} X \xrightarrow{f} Y$.

Soit $\mathfrak{C}$ avec objet initial $\emptyset$. Une **fibre** de $f \colon X \to Y$ est une limite de $\emptyset \xrightarrow{!} Y \xleftarrow{f} X$.

Objets zéro dans les $(\infty, 1)$-catégories

Définition (Fibre et cofibre)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie admettant un objet terminal $*$. Une **cofibre** d'un morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$ colimite du diagramme $* \xleftarrow{!} X \xrightarrow{f} Y$.

Soit $\mathfrak{C}$ avec objet initial $\emptyset$. Une **fibre** de $f\colon X \to Y$ est une limite de $\emptyset \xrightarrow{!} Y \xleftarrow{f} X$.

Définition ($(\infty, 1)$-catégorie pointée)

Un **objet zéro** d'une $(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{C}$ est un objet $0 \in \mathfrak{C}$ qui est à la fois initial et terminal.

Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est une $(\infty, 1)$-catégorie admettant un objet zéro.

Objets zéro dans les $(\infty, 1)$-catégories

Définition (Fibre et cofibre)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie admettant un objet terminal $*$. Une **cofibre** d'un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$ colimite du diagramme $* \xleftarrow{!} X \xrightarrow{f} Y$.
Soit $\mathfrak{C}$ avec objet initial $\emptyset$. Une **fibre** de $f : X \to Y$ est une limite de $\emptyset \xrightarrow{!} Y \xleftarrow{f} X$.

Définition ($(\infty, 1)$-catégorie pointée)

Un **objet zéro** d'une $(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{C}$ est un objet $0 \in \mathfrak{C}$ qui est à la fois initial et terminal. Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est une $(\infty, 1)$-catégorie admettant un objet zéro. Si $\mathfrak{C}$ est pointée, l'objet zéro permet de la voir comme une $(\infty, 1)$-catégorie sous $*$; l'$(\infty, 1)$-catégorie des morphismes entre deux $(\infty, 1)$-catégories pointées $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ est $\mathfrak{Fonc}_{*/}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$.

Si $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$-catégorie avec un objet final $*$, son $(\infty, 1)$-catégorie d'objets pointés $\mathfrak{C}^{*/}$ est pointée ; c'est même l'$(\infty, 1)$-catégorie pointée librement engendrée par $\mathfrak{C}$.

∞-catégories stables

Dire qu'un carré ci-dessous dans une $(\infty, 1)$-catégorie pointée $\mathfrak{C}$ est cartésien revient à dire que f est une fibre de g, et dire qu'il est cocartésien revient à dire que g est une cofibre de f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r, "!"] & Z \end{tikzcd}$$

∞-catégories stables

Dire qu'un carré ci-dessous dans une $(\infty, 1)$-catégorie pointée $\mathfrak{C}$ est cartésien revient à dire que f est une fibre de g, et dire qu'il est cocartésien revient à dire que g est une cofibre de f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r, "!"] & Z \end{tikzcd}$$

On appellera un tel carré cohérent un **triangle** de $\mathfrak{C}$, et l'on dira qu'il est **(co)exact** (ou que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une **suite (co)fibrée**) si le carré est (co)cartésien.

Définition ($(\infty, 1)$-catégorie stable)

Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est **stable** si tout morphisme admet une fibre et une cofibre, et si un triangle est exact exactement quand (*i.e.* si et seulement si) il est coexact (*i.e.* tout morphisme est la fibre de sa cofibre, et la cofibre de sa fibre).

(Dé)suspension

Remarque

Soit $(X, x_0 \colon * \to X)$ un espace topologique pointé. Calculons le produit fibré homotopique $* \times^{\mathbb{R}}_{x_0, X, x_0} *$ (pour la structure de modèle de Quillen).

(Dé)suspension

Remarque

Soit $(X, x_0 \colon * \to X)$ un espace topologique pointé. Calculons le produit fibré homotopique $* \times^{\mathbb{R}}_{x_0, X, x_0} *$ (pour la structure de modèle de Quillen). Un remplacement fibrant du diagramme $* \xrightarrow{x_0} X \xleftarrow{x_0} *$ est donné par $* \xrightarrow{x_0} X \leftarrow X^I \times_X *$ ou bien $* \xrightarrow{(x_0, x_0)} X \times X \xleftarrow{(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)} X^I$,

(Dé)suspension

Remarque

Soit $(X, x_0 \colon * \to X)$ un espace topologique pointé. Calculons le produit fibré homotopique $* \times^{\mathbb{R}}_{x_0, X, x_0} *$ (pour la structure de modèle de Quillen). Un remplacement fibrant du diagramme $* \xrightarrow{x_0} X \xleftarrow{x_0} *$ est donné par $* \xrightarrow{x_0} X \leftarrow X^I \times_X *$ ou bien $* \xrightarrow{(x_0, x_0)} X \times X \xleftarrow{(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)} X^I$, dont la limite est l'espace des lacets dans X basés en x_0.

(Dé)suspension

Remarque

Soit $(X, x_0 \colon * \to X)$ un espace topologique pointé. Calculons le produit fibré homotopique $* \times^{\mathbb{R}}_{x_0, X, x_0} *$ (pour la structure de modèle de Quillen). Un remplacement fibrant du diagramme $* \xrightarrow{x_0} X \xleftarrow{x_0} *$ est donné par $* \xrightarrow{x_0} X \leftarrow X^I \times_X *$ ou bien $* \xrightarrow{(x_0, x_0)} X \times X \xleftarrow{(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)} X^I$, dont la limite est l'espace des lacets dans X basés en x_0.

Définition (Objets d'espace de lacet et de suspension)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie pointée, et soit $X \in \mathfrak{C}$. L'**objet de suspension** de X, noté ΣX, et l'**objet d'espace de lacets** de X, noté ΩX, sont définis par les diagrammes respectivement cocartésien et cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & 0 \arrow[d, "!"] \\ 0 \arrow[r, "!"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 0 \arrow[d, "!"] \\ 0 \arrow[r, "!"] & X \end{tikzcd} .$$

Propriétés d'exactitude des ∞-catégories stables

Proposition

Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est stable si et seulement si elle est finiment bicomplète et un carré cohérent est cartésien exactement quand (*i.e.* si et seulement si) il est cocartésien.

Propriétés d'exactitude des ∞-catégories stables

Proposition

Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est stable si et seulement si elle est finiment bicomplète et un carré cohérent est cartésien exactement quand (*i.e.* si et seulement si) il est cocartésien.

Lemme

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie pointée. Les constructions de suspensions et d'espaces de lacets induisent une $(\infty, 1)$-adjonction $\Sigma\colon \mathfrak{C} \rightleftarrows \mathfrak{C} \colon \Omega$.

Propriétés d'exactitude des ∞-catégories stables

Proposition

Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est stable si et seulement si elle est finiment bicomplète et un carré cohérent est cartésien exactement quand (*i.e.* si et seulement si) il est cocartésien.

Lemme

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie pointée. Les constructions de suspensions et d'espaces de lacets induisent une $(\infty, 1)$-adjonction $\Sigma\colon \mathfrak{C} \rightleftarrows \mathfrak{C}\colon \Omega$.

Théorème

Une $(\infty, 1)$-catégorie pointée est stable si et seulement si elle est finiment cocomplète et son $(\infty, 1)$-foncteur de suspension est une équivalence, si et seulement si elle est finiment complète et son $(\infty, 1)$-foncteur d'espaces de lacets est un équivalence.

Proposition

Soit $\mathfrak{A}$ une $(\infty, 1)$-catégorie stable. Alors $\mathrm{Ho}(\mathfrak{A})$ admet une structure triangulée

Proposition

Soit $\mathfrak{A}$ une $(\infty, 1)$-catégorie stable. Alors $\mathrm{Ho}(\mathfrak{A})$ admet une structure triangulée dont

- le foncteur de décalage est le foncteur $[1] = \mathrm{Ho}(\Sigma)$,

La catégorie d'homotopie d'une $(\infty, 1)$-catégorie stable

Proposition

Soit $\mathfrak{A}$ une $(\infty, 1)$-catégorie stable. Alors $\mathrm{Ho}(\mathfrak{A})$ admet une structure triangulée dont

- le foncteur de décalage est le foncteur $[1] = \mathrm{Ho}(\Sigma)$,
- les triangles distingués sont les triangles $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ se relevant à un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "!"'] & Y \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\widetilde{g}"] & 0 \arrow[d, "!"] \\ 0' \arrow[r, "!"'] & Z \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & W \end{tikzcd}$$

  où 0 et $0'$ sont des objets zéro, les deux carrés sont cocartésiens, les classes d'homotopie de $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont f et g, et h est la classe d'homotopie de la composition de $\widetilde{h}$ avec l'équivalence canonique $W \simeq \Sigma X$.

Définition ($(\infty, 1)$-catégorie dérivée)

Pour $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs, $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A}) \coloneqq \mathfrak{Ch}^-(\mathfrak{A})[\![\mathrm{qis}^{-1}]\!]$.

Remarque : On obtient aussi $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A})$ comme le « nerf » de la catégorie dg des complexes bornés supérieurement de projectifs de $\mathfrak{A}$.

Propriété universelle de l'$(\infty, 1)$-catégorie dérivée

Définition ($(\infty, 1)$-catégorie dérivée)

Pour $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs, $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A}) \coloneqq \mathfrak{Ch}^-(\mathfrak{A})[\![\mathrm{qis}^{-1}]\!]$.

Remarque : On obtient aussi $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A})$ comme le « nerf » de la catégorie dg des complexes bornés supérieurement de projectifs de $\mathfrak{A}$.

Théorème

Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs et $\mathfrak{T}$ une $(\infty, 1)$-catégorie stable munie d'une t-structure complète à gauche. Alors la sous-$(\infty, 1)$-catégorie pleine de $\mathfrak{Fonc}(\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A}), \mathfrak{C})$ sur les $(\infty, 1)$-foncteurs t-exacts à droite appliquant les projectifs de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}^\heartsuit$ est équivalente à la catégorie des foncteurs exacts à droite $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}^\heartsuit$.

Propriété universelle de l'$(\infty,1)$-catégorie dérivée

Définition ($(\infty,1)$-catégorie dérivée)

Pour $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs, $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A}) := \mathfrak{Ch}^-(\mathfrak{A})[\![\mathrm{qis}^{-1}]\!]$.

Remarque : On obtient aussi $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A})$ comme le « nerf » de la catégorie dg des complexes bornés supérieurement de projectifs de $\mathfrak{A}$.

Théorème

Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs et $\mathfrak{T}$ une $(\infty,1)$-catégorie stable munie d'une t-structure complète à gauche. Alors la sous-$(\infty,1)$-catégorie pleine de $\mathfrak{Fonc}(\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{A}),\mathfrak{C})$ sur les $(\infty,1)$-foncteurs t-exacts à droite appliquant les projectifs de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}^\heartsuit$ est équivalente à la catégorie des foncteurs exacts à droite $\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}^\heartsuit$.

Le foncteur $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}^\heartsuit}$ donne un $(\infty,1)$-foncteur $\mathscr{D}^-_\infty(\mathfrak{C}^\heartsuit)\to\mathfrak{C}$.

Section 8: Spectres et théories cohomologiques

$(\infty, 1)$-foncteurs exacts

Définition ($(\infty, 1)$-foncteurs exacts)

- Un $(\infty, 1)$-foncteur $\mathscr{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est dit **exact à gauche** s'il commute aux limites finies, et **exact à droite** s'il commute aux colimites finies.
- Si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ sont stables, $\mathscr{F}$ est **exact** s'il préserve les objets zéro et les suites (co)fibrées.

Lemme

Un $(\infty, 1)$-foncteur entre deux $(\infty, 1)$-catégories stables est exact si et seulement si il est exact à gauche, si et seulement il est exact à droite.

Proposition

Un $(\infty, 1)$-foncteur entre deux $(\infty, 1)$-catégories stables est exact si et seulement si il préserve les objets zéro et commute aux suspensions.

On note $\mathfrak{St}$ l'$(\infty, 1)$-catégorie des $(\infty, 1)$-catégories stables et $(\infty, 1)$-foncteurs exacts.

Définition (Stabilisation)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie finiment complète. Une **stabilisation** de $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$-catégorie stable $\mathfrak{C}^{\text{ghost}}$ munie d'un $(\infty, 1)$-foncteur exact à gauche $\Omega^\infty \colon \mathfrak{C}^{\text{ghost}} \to \mathfrak{C}$ telle que, pour toute $(\infty, 1)$-catégorie stable $\mathfrak{A}$, $\Omega^\infty_* \colon \mathfrak{Fonc}^{\text{ex}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}^{\text{ghost}}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Fonc}^{\text{ex.g.}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ (où $\mathfrak{Fonc}^{\text{ex.g.}}$ dénote les $(\infty, 1)$-foncteurs exacts à gauche).

Stabilisation et spectres

Définition (Stabilisation)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie finiment complète. Une **stabilisation** de $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$-catégorie stable $\mathfrak{C}^{\text{👻}}$ munie d'un $(\infty, 1)$-foncteur exact à gauche $\Omega^{\infty} \colon \mathfrak{C}^{\text{👻}} \to \mathfrak{C}$ telle que, pour toute $(\infty, 1)$-catégorie stable $\mathfrak{A}$, $\Omega^{\infty}_{*} \colon \mathfrak{Fonc}^{\mathrm{ex}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}^{\text{👻}}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Fonc}^{\mathrm{ex.g.}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ (où $\mathfrak{Fonc}^{\mathrm{ex.g.}}$ dénote les $(\infty, 1)$-foncteurs exacts à gauche).

Rappelons que $\mathfrak{C}$ est stable si et seulement si son $(\infty, 1)$-foncteurs d'espaces de lacets en est une auto-équivalence : construire $\mathfrak{C}^{\text{👻}}$ revient donc à inverser universellement $\Omega_{\mathfrak{C}}$.

Stabilisation et spectres

Définition (Stabilisation)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie finiment complète. Une **stabilisation** de $\mathfrak{C}$ est une $(\infty, 1)$-catégorie stable $\mathfrak{C}^{\Ghost}$ munie d'un $(\infty, 1)$-foncteur exact à gauche $\Omega^\infty \colon \mathfrak{C}^{\Ghost} \to \mathfrak{C}$ telle que, pour toute $(\infty, 1)$-catégorie stable $\mathfrak{A}$, $\Omega^\infty_* \colon \mathfrak{Fonc}^{\mathrm{ex}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}^{\Ghost}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Fonc}^{\mathrm{ex.g.}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ (où $\mathfrak{Fonc}^{\mathrm{ex.g.}}$ dénote les $(\infty, 1)$-foncteurs exacts à gauche).

Rappelons que $\mathfrak{C}$ est stable si et seulement si son $(\infty, 1)$-foncteurs d'espaces de lacets en est une auto-équivalence : construire $\mathfrak{C}^{\Ghost}$ revient donc à inverser universellement $\Omega_{\mathfrak{C}}$.

Proposition

Pour toute $(\infty, 1)$-catégorie finiment complète $\mathfrak{C}$,

$$\mathfrak{C}^{\Ghost} = \varprojlim(\cdots \to \mathfrak{C}^{*/} \xrightarrow{\Omega_{\mathfrak{C}}} \mathfrak{C}^{*/} \xrightarrow{\Omega_{\mathfrak{C}}} \mathfrak{C}^{*/}).$$

Remarque

On a clairement $\mathfrak{C}^{👻} = (\mathfrak{C}^{*/})^{👻}$, puisque $(\mathfrak{C}^{*/})^{*/} = (\mathfrak{C}^{*/})^{\mathsf{0}/} = \mathfrak{C}^{*/}$.

On appelle aussi $\mathfrak{C}^{👻}$ l'$(\infty, 1)$-catégorie des **objets en spectres** de $\mathfrak{C}$. En particulier, $\infty - \mathfrak{Grpd}^{👻}$ est appelée l'$(\infty, 1)$-catégorie des **spectres**, et notée simplement $\mathfrak{Sp}$.

Description des spectres

Remarque

On a clairement $\mathfrak{C}^{\Ghost} = (\mathfrak{C}^{*/})^{\Ghost}$, puisque $(\mathfrak{C}^{*/})^{*/} = (\mathfrak{C}^{*/})^{0/} = \mathfrak{C}^{*/}$.

Un objet de $\mathfrak{C}^{\Ghost}$ est donc essentiellement donné par une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathfrak{C}$ avec des équivalences $E_n \simeq \Omega E_{n+1}$. Il s'ensuit que $\Sigma^\infty E = E_0$ est un espace de lacets infini, et est muni d'une structure de groupe abélien (à homotopie près).

On appelle aussi $\mathfrak{C}^{\Ghost}$ l'$(\infty, 1)$-catégorie des **objets en spectres** de $\mathfrak{C}$. En particulier, $\infty - \mathfrak{Grpd}^{\Ghost}$ est appelée l'$(\infty, 1)$-catégorie des **spectres**, et notée simplement $\mathfrak{Sp}$.

Définition (Théorie cohomologique)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty,1)$-catégorie pointée cocomplète. Une **théorie cohomologique** sur $\mathfrak{C}$ est une suite $\{\mathscr{H}^n\colon \operatorname{Ho}\mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Ens}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de $\delta^n\colon \mathscr{H}^n \xrightarrow{\simeq} \mathscr{H}^{n+1} \circ \operatorname{Ho}(\Sigma)$, vérifiant

1. pour toute famille (C_i) d'objets de $\mathfrak{C}$, $\mathscr{H}^n(\coprod_i C_i) \xrightarrow{\simeq} \prod_i \mathscr{H}^n(C_i)$;
2. pour toute suite fibrée $C' \to C \to C''$, l'image $\mathscr{H}^n(C'') \to \mathscr{H}^n(C) \to \mathscr{H}^n(C')$ est une suite exacte d'ensemble pointés (par $* = \mathscr{H}^n(0) \to \mathscr{H}^n(C)$).

Théories cohomologiques

Définition (Théorie cohomologique)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty,1)$-catégorie pointée cocomplète. Une **théorie cohomologique** sur $\mathfrak{C}$ est une suite $\{\mathscr{H}^n\colon \operatorname{Ho}\mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Ens}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ munie de $\delta^n\colon \mathscr{H}^n \xrightarrow{\simeq} \mathscr{H}^{n+1}\circ \operatorname{Ho}(\Sigma)$, vérifiant

1. pour toute famille (C_i) d'objets de $\mathfrak{C}$, $\mathscr{H}^n(\coprod_i C_i) \xrightarrow{\simeq} \prod_i \mathscr{H}^n(C_i)$;
2. pour toute suite fibrée $C' \to C \to C''$, l'image $\mathscr{H}^n(C'') \to \mathscr{H}^n(C) \to \mathscr{H}^n(C')$ est une suite exacte d'ensemble pointés (par $* = \mathscr{H}^n(0) \to \mathscr{H}^n(C)$).

Remarque

Si $\mathscr{H}$ est une théorie cohomologique, pour tout objet C l'ensemble $\mathscr{H}^n(C)$ est en fait muni d'une structure de groupe abélien (par $\mathscr{H}^n(C) = \mathscr{H}^{n+2}(\Sigma^2 C)$ et grâce à la structure de cogroupe cocommutatif de $\Sigma^2 C$). De même, les suites exactes d'ensembles pointés requises sont en fait des suites exactes de groupes abéliens.

Représentabilité des théories cohomologiques

Théorème (Représentabilité de Brown)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie présentable engendrée par un ensemble d'objets compacts, cogroupes dans $\mathrm{Ho}(\mathfrak{C})$. Alors $\mathscr{H} : \mathrm{Ho}\,\mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Ens}$ est représentable ssi

- pour toute famille (C_i) d'objets de $\mathfrak{C}$, $\mathscr{H}(\coprod_i C_i) \xrightarrow{\simeq} \prod_i \mathscr{H}(C_i)$;
- pour toute somme amalgamée $D' \simeq D \amalg_C C'$ dans $\mathfrak{C}$, $\mathscr{H}(D') \twoheadrightarrow \mathscr{H}(C') \times_{\mathscr{H}(C)} \mathscr{H}(D)$.

Représentabilité des théories cohomologiques

Théorème (Représentabilité de Brown)

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty,1)$-catégorie présentable engendrée par un ensemble d'objets compacts, cogroupes dans $\mathrm{Ho}(\mathfrak{C})$. Alors $\mathscr{H}\colon \mathrm{Ho}\,\mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Ens}$ est représentable ssi

- pour toute famille (C_i) d'objets de $\mathfrak{C}$, $\mathscr{H}(\coprod_i C_i) \xrightarrow{\simeq} \prod_i \mathscr{H}(C_i)$;
- pour toute somme amalgamée $D' \simeq D \amalg_C C'$ dans $\mathfrak{C}$, $\mathscr{H}(D') \twoheadrightarrow \mathscr{H}(C') \times_{\mathscr{H}(C)} \mathscr{H}(D)$.

Lemme

Toute théorie cohomologique vérifie les conditions de représentabilité de Brown.

Corollaire

Soit $\mathfrak{C}$ une $(\infty,1)$-catégorie présentable pointée engendrée par un ensemble d'objets compacts en cocgroupes à homotopies près. Alors toute théorie cohomologique sur $\mathfrak{C}$ est représentable par un objet en spectres de $\mathfrak{C}$.

Quatrième partie : Annexe

Dualité de Poincaré, version 1

Soit X une n-variété euclidienne compacte orientable. Pour $k \leq n$, $\mathrm{H}^k(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R})$.

Rappels sur la dualité de Poincaré euclidienne

Dualité de Poincaré, version 1

Soit X une n-variété euclidienne compacte orientable. Pour $k \leq n$, $\mathrm{H}^k(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R})$.

- On a $\mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}^{n-k}(X;\mathbb{R})^\vee$; le théorème dit alors que $\mathrm{H}^k(X) \times \mathrm{H}^{n-k}(X) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$ est un accouplement parfait.
- La dernière flèche est la **trace** ou **intégrale**, induite par un choix d'orientation.

Rappels sur la dualité de Poincaré euclidienne

Dualité de Poincaré, version 1

Soit X une n-variété euclidienne compacte orientable. Pour $k \leq n$, $\mathrm{H}^k(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R})$.

- On a $\mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}^{n-k}(X;\mathbb{R})^\vee$; le théorème dit alors que $\mathrm{H}^k(X) \times \mathrm{H}^{n-k}(X) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$ est un accouplement parfait.
- La dernière flèche est la **trace** ou **intégrale**, induite par un choix d'orientation.
- Si X non compacte, on remplace H^{n-k} et H^n par la cohomologie à support compact $\mathrm{H}^i_{\mathrm{c}}$.

Rappels sur la dualité de Poincaré euclidienne

Dualité de Poincaré, version 1

Soit X une n-variété euclidienne compacte orientable. Pour $k \leq n$, $\mathrm{H}^k(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R})$.

- On a $\mathrm{H}_{n-k}(X;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}^{n-k}(X;\mathbb{R})^\vee$; le théorème dit alors que $\mathrm{H}^k(X) \times \mathrm{H}^{n-k}(X) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$ est un accouplement parfait.
- La dernière flèche est la **trace** ou **intégrale**, induite par un choix d'orientation.
- Si X non compacte, on remplace H^{n-k} et H^n par la cohomologie à support compact H^i_c.
- $\mathrm{H}^i_\mathrm{c}(X;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^i\Gamma_\mathrm{c}(X;\mathbb{R}_X)$ où $\Gamma_\mathrm{c}(X;\mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(X) \mid \mathrm{supp}(s) \text{ compact}\}$

Faisceau d'orientation

Le **faisceau d'orientation** de X est $\mathscr{O}r_X : U \mapsto \mathrm{H}^n(X, X \setminus U;\mathbb{R})$; c'est un système local de tiges $\mathscr{O}r_{X,x} = \mathrm{H}^n(X, X \setminus \{x\};\mathbb{R})$ isomorphes (non-canoniquement) à $\mathbb{R}$.
Une section globale de $\mathscr{O}r_X$, donnant $\mathscr{O}r_X \simeq \mathbb{R}_X$, est une orientation de X.

Images directes à support compact

Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts.

Proposition/Définition

Il existe un unique sous-foncteur $f_! \subset f_*\colon \mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}) \to \mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$ tel que, pour $\mathscr{F} \in \mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$ et $V \subset Y$,

$$(f_!\mathscr{F})(V) = \left\{s \in (f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \mid f|_{\mathrm{supp}(s)}\colon \mathrm{supp}(s) \to V \text{ est propre.}\right\}.$$

Si f est propre, alors $f_! = f_*$.

Images directes à support compact

Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts.

Proposition/Définition

Il existe un unique sous-foncteur $f_! \subset f_*\colon \mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}) \to \mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$ tel que, pour $\mathscr{F} \in \mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})$ et $V \subset Y$,

$$(f_!\mathscr{F})(V) = \left\{ s \in (f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \mid f|_{\mathrm{supp}(s)}\colon \mathrm{supp}(s) \to V \text{ est propre.} \right\}.$$

Si f est propre, alors $f_! = f_*$.

Si $j\colon Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'une partie localement fermée, $j_!$ est l'extension par 0 et admet un adjoint à droite $j^! \simeq j^* \circ \Gamma_Z$ où $\Gamma_Z\mathscr{G}\colon U \mapsto \{s \in \mathscr{G}(U) \mid \mathrm{supp}(s) \subset Z\}$.

En général $f_!$ n'a pas d'adjoint à droite.

Six opérations de Grothendieck

Le système $\mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(-;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ a un **formalisme des six opérations**

- adjonctions $\mathbb{L}f^*\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))\colon \mathbb{R}f_*$

Six opérations de Grothendieck

Le système $\mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(-;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ a un **formalisme des six opérations**

- adjonctions $\mathbb{L}f^*\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))\colon \mathbb{R}f_*$
- adjonctions $\mathbb{R}f_!\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))\colon f^!$, avec $f_! \Rightarrow f_*$

Remarques : $f^!$ existe au niveau des catégories dérivées mais n'est (généralement) pas un foncteur dérivé. La coünité $\mathbb{R}f_! f^! \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ est la « trace ».

Six opérations de Grothendieck

Le système $\mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(-;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ a un **formalisme des six opérations**

- adjonctions $\mathbb{L}f^*\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))\colon \mathbb{R}f_*$
- adjonctions $\mathbb{R}f_!\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(Y;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))\colon f^!$, avec $f_! \Rightarrow f_*$
- structure monoïdale $- \otimes^{\mathbb{L}} -$ avec hom internes $\mathbb{R}\mathscr{H}om$: adjonctions

  $- \otimes^{\mathbb{L}} \mathscr{F}\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk})) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))\colon \mathbb{R}\mathscr{H}om(\mathscr{F},-)$

Les adjonctions globales se relèvent à $\mathbb{R}\mathscr{H}om(\mathbb{R}f_!\mathscr{F},\mathscr{G}) \simeq \mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathscr{H}om(\mathscr{F},f^!\mathscr{G})$.
Les images directes/inverses vérifient le changement de base pour les morphismes séparés.

Définition (Complexe dualisant)

Le **complexe dualisant absolu** de Y est $\omega_Y = \mathbb{R}p^!(\Bbbk)$ où $p\colon Y \to *$.
Le **complexe dualisant** (relatif) de $f\colon X \to Y$ est $\omega_{f\colon X/Y} = f^!\omega_Y$.

Faisceaux d'orientation

Soit X une n-variété. Alors $\omega_X \simeq \mathscr{O}\!r_X[n]$. En particulier $\Bbbk = \omega_*$, d'où $\omega_Y = \omega_{Y/*} \forall Y$.

Définition (Complexe dualisant)

Le **complexe dualisant absolu** de Y est $\omega_Y = \mathbb{R}p^!(\Bbbk)$ où $p\colon Y \to *$.
Le **complexe dualisant** (relatif) de $f\colon X \to Y$ est $\omega_{f\colon X/Y} = f^!\omega_Y$.

Faisceaux d'orientation

Soit X une n-variété. Alors $\omega_X \simeq \mathcal{O}r_X[n]$. En particulier $\Bbbk = \omega_*$, d'où $\omega_Y = \omega_{Y/*} \forall Y$.

Définition (Dual de Verdier)

$\mathbb{D}_X = \mathbb{R}\mathcal{H}om(-, \omega_X)\colon \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_\Bbbk))^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_\Bbbk))$.

Proposition

$\mathscr{D}^b_{\mathrm{constr}}(X, \Bbbk)$: complexes à cohomologies constructibles. Alors $\mathbb{D}_X^2 \simeq \mathrm{id}$ sur $\mathscr{D}^b_{\mathrm{constr}}(X, \Bbbk)$.

Dualité de Verdier II

Lemme (dualité de Poincaré–Verdier)

$\mathbb{D}$ entrelace ! et $*$: si $f\colon X \to Y$, alors $\mathbb{D}_Y \circ \mathbb{R}f_! \simeq \mathbb{R}f_* \circ \mathbb{D}_X$ et $f^! \circ \mathbb{D}_Y \simeq \mathbb{D}_X \circ \mathbb{L}f^*$.

Cohomologie à support compact

Pour $p\colon X \to Y = *$ on a $(\mathrm{H}^\bullet_c(X; \mathscr{F}^\bullet))^\vee \simeq \mathrm{H}^\bullet(X; \mathbb{D}_X\mathscr{F}^\bullet)$.

Dualité de Verdier II

Lemme (dualité de Poincaré–Verdier)

$\mathbb{D}$ entrelace ! et $*$: si $f\colon X \to Y$, alors $\mathbb{D}_Y \circ \mathbb{R}f_! \simeq \mathbb{R}f_* \circ \mathbb{D}_X$ et $f^! \circ \mathbb{D}_Y \simeq \mathbb{D}_X \circ \mathbb{L}f^*$.

Cohomologie à support compact

Pour $p\colon X \to Y = *$ on a $(\mathrm{H}^\bullet_c(X; \mathscr{F}^\bullet))^\vee \simeq \mathrm{H}^\bullet(X; \mathbb{D}_X \mathscr{F}^\bullet)$.

Proposition

Si $\mathscr{F}$ est un système local à support sur X de dimension n, alors $\mathbb{D}_X \mathscr{F} \simeq \mathscr{F}^\vee[2n]$, donc $\mathbb{D}_X(\mathscr{F}[n]) \simeq \mathscr{F}^\vee[n]$.

Complexes dualisants et images inverses exceptionnelles I

On suppose maintenant que $\Bbbk$ est un anneau régulier nœthérien de dimension de Krull finie.

Définition (Complexe dualisant)

Un **complexe dualisant** pour un $\Bbbk$-algèbre A de type fini est $\omega_A \in \mathscr{D}^{\mathrm{b}}(\mathfrak{Mod}_A)$ d'Ext-amplitude finie, de A-modules de cohomologie finis, et tel que $A \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\operatorname{hom}_A(-, \omega_A)$.

Lemme

$\mathbb{D}_A \coloneqq \mathbb{R}\operatorname{hom}_A(-, \omega_A)$ est une auto-anti-équivalence de $\mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{fini}}(\mathfrak{Mod}_A)$, et $\mathbb{D}_A^2 \simeq \mathrm{id}$.

Complexes dualisants et images inverses exceptionnelles I

On suppose maintenant que $\Bbbk$ est un anneau régulier nœthérien de dimension de Krull finie.

Définition (Complexe dualisant)

Un **complexe dualisant** pour un $\Bbbk$-algèbre A de type fini est $\omega_A \in \mathscr{D}^b(\mathfrak{Mod}_A)$ d'Ext-amplitude finie, de A-modules de cohomologie finis, et tel que $A \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\operatorname{hom}_A(-, \omega_A)$.

Lemme

$\mathbb{D}_A \coloneqq \mathbb{R}\operatorname{hom}_A(-, \omega_A)$ est une auto-anti-équivalence de $\mathscr{D}^b_{\text{fini}}(\mathfrak{Mod}_A)$, et $\mathbb{D}_A^2 \simeq \mathrm{id}$.

Complexe dualisant rigide

Un complexe dualisant rigide est ω_A muni d'un iso $\omega_A \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\operatorname{hom}_{A \otimes^{\mathbb{L}}_{\Bbbk} A}(A, \omega_A \otimes^{\mathbb{L}}_A \omega_A)$. Une telle paire est unique à isomorphisme rigide unique près.

Image inverse exceptionnelle

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme entre $\Bbbk$-schémas de types finis. On définit $f^! = \mathbb{D}_X \circ \mathbb{L}f^* \circ \mathbb{D}_Y$.

Image inverse exceptionnelle

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme entre $\Bbbk$-schémas de types finis. On définit $f^! = \mathbb{D}_X \circ \mathbb{L}f^* \circ \mathbb{D}_Y$.

- Si f est un morphisme fini, $f^!$ est naturellement isomorphe à $\mathscr{M} \mapsto \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$.

Image inverse exceptionnelle

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme entre $\Bbbk$-schémas de types finis. On définit $f^! = \mathbb{D}_X \circ \mathbb{L}f^* \circ \mathbb{D}_Y$.

- Si f est un morphisme fini, $f^!$ est naturellement isomorphe à $\mathscr{M} \mapsto \mathbb{R}\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_Y}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$.
- Si f est lisse, $f^!$ est naturellement isomorphe à

$$\mathscr{M} \mapsto \prod_i \Omega^{n_i}_{X_i/Y}[n_i] \otimes_A M$$

où $X = \coprod_i X_i$ est la décomposition en composantes connexes et $n_i = \mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{X_i}}(\Omega^1_{X_i/Y})$.

Image inverse exceptionnelle

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme entre $\Bbbk$-schémas de types finis. On définit $f^! = \mathbb{D}_X \circ \mathbb{L}f^* \circ \mathbb{D}_Y$.

- Si f est un morphisme fini, $f^!$ est naturellement isomorphe à $\mathscr{M} \mapsto \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$.
- Si f est lisse, $f^!$ est naturellement isomorphe à

$$\mathscr{M} \mapsto \prod_i \Omega^{n_i}_{X_i/Y}[n_i] \otimes_A M$$

où $X = \coprod_i X_i$ est la décomposition en composantes connexes et $n_i = \mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{X_i}}(\Omega^1_{X_i/Y})$.

Proposition

On a un isomorphisme naturel $f^!\omega_Y \xrightarrow{\simeq} \omega_X$.

Images directes exceptionnelles pour les schémas

Théorème (Nagata)

Soient S un schéma nœthérien et $f\colon X \to Y$ un morphisme de S-schémas séparés de types finis. On a une factorisation $f = \overline{f} \circ j$ où $j\colon X \hookrightarrow \overline{X}$ est une immersion ouverte quasicmpacte et $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ est propre.

Définition

$$\left.\begin{array}{l} \blacktriangleright\ f_! = \mathbb{R}\overline{f}_* \circ j_! \text{ où } j_! \text{ est l'extension par } 0 \\ \blacktriangleright\ \mathbb{R}\overline{f}_* \text{ admet un adjoint à droite } f^\times\text{. On pose } f^! = j^* \circ f^\times. \end{array}\right\} \Rightarrow f_! \dashv f^!$$

Ces définitions sont indépendantes du choix de compactification.

Proposition

Cette définition de $f^!$ coïncide avec la précédente.

La définition

Définition (Structure de troncature)

Une **t-structure** sur une catégorie triangulée $\mathfrak{D}$ est donnée par deux sous-catégories pleines $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ closes par isomorphismes et telles que :

1. $\mathfrak{D}^{\leq -1} \subseteq \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $\mathfrak{D}^{\geq 1} \subseteq \mathfrak{D}^{\geq 0}$ où $\mathfrak{D}^{\leq n} \coloneqq \mathfrak{D}^{\leq 0}[-n]$ et $\mathfrak{D}^{\geq n} \coloneqq \mathfrak{D}^{\geq 1}[-(n-1)]$;

Définition (Structure de troncature)

Une **t-structure** sur une catégorie triangulée $\mathfrak{D}$ est donnée par deux sous-catégories pleines $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ closes par isomorphismes et telles que :

1. $\mathfrak{D}^{\leq -1} \subseteq \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $\mathfrak{D}^{\geq 1} \subseteq \mathfrak{D}^{\geq 0}$ où $\mathfrak{D}^{\leq n} := \mathfrak{D}^{\leq 0}[-n]$ et $\mathfrak{D}^{\geq n} := \mathfrak{D}^{\geq 1}[-(n-1)]$;
2. pour $X \in \mathfrak{D}^{\leq 0}$, $Y \in \mathfrak{D}^{\geq 1}$ on a $\hom_{\mathfrak{D}}(X, Y) = 0$;
3. tout $X \in \mathfrak{D}$ admet un triangle distingué $A \to X \to B \to A[1]$ avec $A \in \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $B \in \mathfrak{D}^{\geq 1}$.

La définition

Définition (Structure de troncature)

Une **t-structure** sur une catégorie triangulée $\mathfrak{D}$ est donnée par deux sous-catégories pleines $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ closes par isomorphismes et telles que :

1. $\mathfrak{D}^{\leq -1} \subseteq \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $\mathfrak{D}^{\geq 1} \subseteq \mathfrak{D}^{\geq 0}$ où $\mathfrak{D}^{\leq n} \coloneqq \mathfrak{D}^{\leq 0}[-n]$ et $\mathfrak{D}^{\geq n} \coloneqq \mathfrak{D}^{\geq 1}[-(n-1)]$;
2. pour $X \in \mathfrak{D}^{\leq 0}$, $Y \in \mathfrak{D}^{\geq 1}$ on a $\hom_{\mathfrak{D}}(X, Y) = 0$;
3. tout $X \in \mathfrak{D}$ admet un triangle distingué $A \to X \to B \to A[1]$ avec $A \in \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $B \in \mathfrak{D}^{\geq 1}$.

La translation $(\mathfrak{D}^{\leq n}, \mathfrak{D}^{\geq n+1})$ est une t-structure.

La définition

Définition (Structure de troncature)

Une **t-structure** sur une catégorie triangulée $\mathfrak{D}$ est donnée par deux sous-catégories pleines $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ closes par isomorphismes et telles que :

1. $\mathfrak{D}^{\leq -1} \subseteq \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $\mathfrak{D}^{\geq 1} \subseteq \mathfrak{D}^{\geq 0}$ où $\mathfrak{D}^{\leq n} \coloneqq \mathfrak{D}^{\leq 0}[-n]$ et $\mathfrak{D}^{\geq n} \coloneqq \mathfrak{D}^{\geq 1}[-(n-1)]$;
2. pour $X \in \mathfrak{D}^{\leq 0}$, $Y \in \mathfrak{D}^{\geq 1}$ on a $\hom_{\mathfrak{D}}(X, Y) = 0$;
3. tout $X \in \mathfrak{D}$ admet un triangle distingué $A \to X \to B \to A[1]$ avec $A \in \mathfrak{D}^{\leq 0}$ et $B \in \mathfrak{D}^{\geq 1}$.

La translation $(\mathfrak{D}^{\leq n}, \mathfrak{D}^{\geq n+1})$ est une t-structure.

Définition (foncteurs t-exacts)

Un foncteur triangulé $\mathscr{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{T}$ est **t-exact à gauche** si $\mathscr{F}(\mathfrak{D}^{\geq 1}) \subset \mathfrak{T}^{\geq 1}$, **t-exact à droite** si $\mathscr{F}(\mathfrak{D}^{\leq 0}) \subset \mathfrak{T}^{\leq 0}$, et **t-exact** s'il est t-exact à gauche et à droite.

Lemme

L'inclusion $\mathfrak{D}^{\leq n} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\geq n} \hookrightarrow \mathfrak{D}$) admet un adjoint à droite $\tau_{\leq n}$ (resp. à gauche $\tau_{\geq n}$).

Dans $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(A)$, les tronqués de $X^\bullet$ sont

$$\tau_{\leq n}(X) = \left[\cdots X^{n-1} \to \ker(d_X^{n-1}) \to 0 \cdots\right] \quad \text{et} \quad \tau_{\geq n}(X) = \left[\cdots 0 \to \operatorname{coker}(d_X^{n}) \to X^{n+1} \cdots\right]$$

Cohomologie dans le cœur I

Foncteurs de troncature

Lemme

L'inclusion $\mathfrak{D}^{\leq n} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\geq n} \hookrightarrow \mathfrak{D}$) admet un adjoint à droite $\tau_{\leq n}$ (resp. à gauche $\tau_{\geq n}$).

Dans $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(A)$, les tronqués de $X^\bullet$ sont

$$\tau_{\leq n}(X) = \left[\cdots X^{n-1} \to \ker(d_X^{n-1}) \to 0 \cdots\right] \quad \text{et} \quad \tau_{\geq n}(X) = \left[\cdots 0 \to \operatorname{coker}(d_X^n) \to X^{n+1} \cdots\right]$$

Proposition

X est dans $\mathfrak{D}^{\leq 0}$ ssi $\tau_{\geq 1} X = 0$, ssi $\tau_{\leq 0} X \xrightarrow{\simeq} X$.

Lemme

L'inclusion $\mathfrak{D}^{\leq n} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\geq n} \hookrightarrow \mathfrak{D}$) admet un adjoint à droite $\tau_{\leq n}$ (resp. à gauche $\tau_{\geq n}$).

Dans $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(A)$, les tronqués de $X^\bullet$ sont

$$\tau_{\leq n}(X) = \left[\cdots X^{n-1} \to \ker(d_X^{n-1}) \to 0 \cdots\right] \quad \text{et} \quad \tau_{\geq n}(X) = \left[\cdots 0 \to \operatorname{coker}(d_X^n) \to X^{n+1} \cdots\right]$$

Proposition

X est dans $\mathfrak{D}^{\leq 0}$ ssi $\tau_{\geq 1}X = 0$, ssi $\tau_{\leq 0}X \xrightarrow{\simeq} X$.

Définition

Le cœur de $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ est $\mathfrak{D}^{\heartsuit} = \mathfrak{D}^{\leq 0} \cap \mathfrak{D}^{\geq 0}$.

Cohomologie dans le cœur II

Théorème

$\mathfrak{D}^{\heartsuit}$ est une catégorie abélienne, et $\mathscr{H}^0 \coloneqq \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} \simeq \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}$ est un foncteur cohomologique.

Cohomologie dans le cœur II

Théorème

$\mathfrak{D}^\heartsuit$ est une catégorie abélienne, et $\mathscr{H}^0 \coloneqq \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} \simeq \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}$ est un foncteur cohomologique.

Proposition

Si $\mathscr{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{T}$ est t-exact à gauche (droite), $\mathscr{H}^0\mathscr{F} : \mathfrak{D}^\heartsuit \to \mathfrak{T}^\heartsuit$ est exact à gauche (droite).

Cohomologie dans le cœur II

Théorème

$\mathfrak{D}^\heartsuit$ est une catégorie abélienne, et $\mathscr{H}^0 \coloneqq \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} \simeq \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}$ est un foncteur cohomologique.

Proposition

Si $\mathscr{F} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{T}$ est t-exact à gauche (droite), $\mathscr{H}^0\mathscr{F} : \mathfrak{D}^\heartsuit \to \mathfrak{T}^\heartsuit$ est exact à gauche (droite).

Définition (t-structure bornée)

$(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ est **bornée** (ou **non-dégénérée**) si $\bigcap_n \mathfrak{D}^{\geq n} = 0 = \bigcap_n \mathfrak{D}^{\leq n}$.

Proposition

Si $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ bornée, X est dans $\mathfrak{D}^{\leq n}$ (resp. $\mathfrak{D}^{\geq n}$) ssi $\mathscr{H}^i(X) = 0$ pour $j > n$ (resp. $j < n$).

Recollement de t-structures I

Le contexte du recollement

X espace topologique, $j\colon U \hookrightarrow X$ ouvert, $j\colon Z = X \setminus U \hookrightarrow X$. $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$, $\mathfrak{D}_U = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ et $\mathfrak{D}_F = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$.

- $$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}_F \arrow[r, "i_* = i_!" description] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\perp"] & \mathfrak{D} \arrow[l, bend right=50, "i^*"'] \arrow[l, bend left=50, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\perp"] & \mathfrak{D}_U \arrow[l, bend right=50, "j_!"'] \arrow[l, bend left=50, "j_*"] \end{tikzcd}$$

Recollement de t-structures I

Le contexte du recollement

X espace topologique, $j\colon U \hookrightarrow X$ ouvert, $j\colon Z = X \setminus U \hookrightarrow X$. $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$, $\mathfrak{D}_U = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ et $\mathfrak{D}_F = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$.

- $$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}_F \arrow[rr, "i_*=i_!" description] & & \mathfrak{D} \arrow[ll, bend right=50, "i^*"'] \arrow[ll, bend left=50, "i^!"] \arrow[rr, "j^*" description] & & \mathfrak{D}_U \arrow[ll, bend right=50, "j_!"'] \arrow[ll, bend left=50, "j_*"] \end{tikzcd}$$
- On a une **suite exacte scindée de catégories triangulées** $0 \to \mathfrak{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathfrak{D} \xrightarrow{j^*} \mathfrak{D}_U \to 0$ (*i.e.* $\mathfrak{D}_U \overset{j_!}{\hookrightarrow} \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}/i_*\mathfrak{D}_F$ est une équivalence),

Recollement de t-structures I

Le contexte du recollement

X espace topologique, $j\colon U \hookrightarrow X$ ouvert, $j\colon Z = X \setminus U \hookrightarrow X$. $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$, $\mathfrak{D}_U = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ et $\mathfrak{D}_F = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$.

- $$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_F \arrow[r, "i_*=i_!" description] & \mathfrak{D} \arrow[l, bend right=50, "i^*"'] \arrow[l, bend left=50, "i^!"] \arrow[l, phantom, bend right=25, "\perp"] \arrow[l, phantom, bend left=25, "\perp"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathfrak{D}_U \arrow[l, bend right=50, "j_!"'] \arrow[l, bend left=50, "j_*"] \arrow[l, phantom, bend right=25, "\perp"] \arrow[l, phantom, bend left=25, "\perp"]
\end{tikzcd}$$
- On a une **suite exacte scindée de catégories triangulées** $0 \to \mathfrak{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathfrak{D} \xrightarrow{j^*} \mathfrak{D}_U \to 0$ (*i.e.* $\mathfrak{D}_U \overset{j_!}{\hookrightarrow} \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}/i_*\mathfrak{D}_F$ est une équivalence), induisant $0 \to \mathfrak{D}_U \xrightarrow{j_!} \mathfrak{D} \xrightarrow{i^*} \mathfrak{D}_F \to 0$ et $0 \to \mathfrak{D}_U \xrightarrow{j_*} \mathfrak{D} \xrightarrow{i^!} \mathfrak{D}_F \to 0$.

X espace topologique, $j\colon U \hookrightarrow X$ ouvert, $j\colon Z = X \setminus U \hookrightarrow X$. $\mathfrak{D} = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$, $\mathfrak{D}_U = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$ et $\mathfrak{D}_F = \mathscr{D}(\mathfrak{Faisc}(X;\mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$.

- $$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}_F \arrow[r, "i_*=i_!" description] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\perp"] & \mathfrak{D} \arrow[l, bend right=60, "i^*"'] \arrow[l, bend left=60, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\perp"] & \mathfrak{D}_U \arrow[l, bend right=60, "j_!"'] \arrow[l, bend left=60, "j_*"] \end{tikzcd}$$

- On a une **suite exacte scindée de catégories triangulées** $0 \to \mathfrak{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathfrak{D} \xrightarrow{j^*} \mathfrak{D}_U \to 0$ (*i.e.* $\mathfrak{D}_U \overset{j_!}{\hookrightarrow} \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}/i_*\mathfrak{D}_F$ est une équivalence), induisant $0 \to \mathfrak{D}_U \xrightarrow{j_!} \mathfrak{D} \xrightarrow{i^*} \mathfrak{D}_F \to 0$ et $0 \to \mathfrak{D}_U \xrightarrow{j_*} \mathfrak{D} \xrightarrow{i^!} \mathfrak{D}_F \to 0$.

- On suppose $\mathfrak{D}_U$ et $\mathfrak{D}_F$ munies de t-structures $(\mathfrak{D}_U^{\leq 0}, \mathfrak{D}_U^{\geq 1})$ et $(\mathfrak{D}_F^{\leq 0}, \mathfrak{D}_F^{\geq 1})$.

Recollement de t-structures II

Théorème

Les sous-catégories pleines

$$\mathfrak{D}^{\leq 0} = \left\{ X \in \mathfrak{D} \mid j^* X \in \mathfrak{D}_U^{\leq 0}, i^* X \in \mathfrak{D}_F^{\leq 0} \right\} \text{ et}$$

$$\mathfrak{D}^{\geq 1} = \left\{ X \in \mathfrak{D} \mid j^* X \in \mathfrak{D}_U^{\geq 1}, i^! X \in \mathfrak{D}_F^{\geq 1} \right\}$$

définissent une t-structure sur $\mathfrak{D}$, bornée ssi $(\mathfrak{D}_U^{\leq 0}, \mathfrak{D}_U^{\geq 1})$ et $(\mathfrak{D}_F^{\leq 0}, \mathfrak{D}_F^{\geq 1})$ le sont.

Proposition

Les foncteurs $f_!$ et i^*, resp. f^* et i_*, resp. j_* et $i^!$, sont t-exacts à droite, resp. t-exacts, resp. à gauche.

Extensions

Définition

Une **extension** de $Y \in \mathfrak{D}_U^{\heartsuit}$ est $\overline{Y} \in \mathfrak{D}$ muni de $j^*\overline{Y} \xrightarrow{\simeq} Y$.

Lemme

- $\overline{Y} = \mathscr{H}^0 j_! Y$ est l'unique extension de Y vérifiant $i^*\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\leq -1}$ et $i^!\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\geq -1}$.
- $\overline{Y} = \mathscr{H}^0 j_* Y$ est l'unique extension de Y vérifiant $i^*\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\leq 1}$ et $i^!\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\geq 1}$.

Extensions

Définition

Une **extension** de $Y \in \mathfrak{D}_U^{\heartsuit}$ est $\overline{Y} \in \mathfrak{D}$ muni de $j^*\overline{Y} \xrightarrow{\simeq} Y$.

Lemme

- $\overline{Y} = \mathscr{H}^0 j_! Y$ est l'unique extension de Y vérifiant $i^*\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\leq -1}$ et $i^!\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\geq -1}$.
- $\overline{Y} = \mathscr{H}^0 j_* Y$ est l'unique extension de Y vérifiant $i^*\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\leq 1}$ et $i^!\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\geq 1}$.

Extension intermédiaire

L'**extension intermédiaire** de Y est $j_{!*} Y = \mathrm{im}(\mathscr{H}^0 j_! Y \to \mathscr{H}^0 j_* Y)$.

Proposition

$\overline{Y} = j_{!*} Y$ est l'unique extension de Y vérifiant $i^*\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\leq 0}$ et $i^!\overline{Y} \in \mathfrak{D}_F^{\geq 0}$, et l'unique extension sans sous-objet ni quotient non-trivial dans $\mathscr{H}^0 i_*(\mathfrak{D}_F^{\heartsuit})$.

Sommaire - Section 10: Structures de troncature

Définition (espace topologique stratifié)

Une **stratification** sur X est une collection $\mathscr{S}$ de **strates** $i_S \colon S \hookrightarrow X$ localement fermées, telle que $X = \coprod_{S \in \mathscr{S}} S$ et l'adhérence de toute strate est une union de strates.

La relation de raffinement ($\mathscr{S} \preccurlyeq \mathscr{T}$ ssi toute strate de $\mathscr{S}$ est réunion de strates de $\mathscr{T}$) donne un ordre sur l'ensemble des stratifications sur X.

Espaces stratifiés et perversités

Définition (espace topologique stratifié)

Une **stratification** sur X est une collection $\mathscr{S}$ de **strates** $i_S\colon S \hookrightarrow X$ localement fermées, telle que $X = \coprod_{S\in\mathscr{S}} S$ et l'adhérence de toute strate est une union de strates.

La relation de raffinement ($\mathscr{S} \preccurlyeq \mathscr{T}$ ssi toute strate de $\mathscr{S}$ est réunion de strates de $\mathscr{T}$) donne un ordre sur l'ensemble des stratifications sur X.

Fonction de perversité

Une **perversité de type Goreski–MacPherson** sur $(X, \mathscr{S})$ est une fonction $p\colon \mathscr{S} \to \mathbb{Z}$ se factorisant comme $\mathscr{S} \xrightarrow{\dim} \mathbb{N} \xrightarrow{\overline{p}} \mathbb{Z}$, telle que $\overline{p}(d) - \overline{p}(d+1) \in [0, 1]$.

La perversité moitié (inférieure) est $p_{\mathscr{S}/2}(S) = -\left\lfloor \frac{\dim(S)}{2} \right\rfloor$.

Les t-structures p-perverses

Théorème/Définition

$$ {}^p\mathfrak{D}^{\leq 0} = \left\{ \mathscr{F} \in \mathfrak{D} \mid \mathscr{H}^n(i_S^* \mathscr{F}) = 0 \, \forall S \in \mathcal{S}, n > p(S) \right\} \text{ et} $$

$$ {}^p\mathfrak{D}^{\leq 0} = \left\{ \mathscr{F} \in \mathfrak{D} \mid \mathscr{H}^n(i_S^! \mathscr{F}) = 0 \, \forall S \in \mathcal{S}, n < p(S) \right\} $$

définissent la **t-structure *p*-perverse** sur $\mathfrak{D} = \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{constr}}(\mathfrak{Faisc}(X; \mathfrak{Mod}_{\Bbbk}))$.

Démonstration.

On l'obtient par récurrence en recollant strate par strate. □

Son cœur $\mathfrak{D}^{p\heartsuit}$ est la catégorie (abélienne) des faisceaux p-pervers.

Proposition

$\mathbb{D}_X$ échange ${}^{p_{\mathcal{S}/2}}\mathfrak{D}^{\leq 0}$ et ${}^{p_{\mathcal{S}/2}}\mathfrak{D}^{\geq 0}$, et donc préserve $\mathfrak{D}^{p_{\mathcal{S}/2}\heartsuit}$.

Extensions

Lemme

Si $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ est obtenue en recollant $(\mathfrak{D}_U^{\leq 0}, \mathfrak{D}_U^{\geq 1})$ et $(\mathfrak{D}_F^{\leq 0}, \mathfrak{D}_F^{\geq 1})$, les objets simples de $\mathfrak{D}^{\heartsuit}$ sont les $\mathscr{H}^0 i_* X$ et $j_{!*} Y$ pour $X \in \mathfrak{D}_F^{\heartsuit}$ et $Y \in \mathfrak{D}_U^{\heartsuit}$ simples.

Extensions

Lemme

Si $(\mathfrak{D}^{\leq 0}, \mathfrak{D}^{\geq 1})$ est obtenue en recollant $(\mathfrak{D}_U^{\leq 0}, \mathfrak{D}_U^{\geq 1})$ et $(\mathfrak{D}_F^{\leq 0}, \mathfrak{D}_F^{\geq 1})$, les objets simples de $\mathfrak{D}^{\heartsuit}$ sont les $\mathscr{H}^0 i_* X$ et $j_{!*} Y$ pour $X \in \mathfrak{D}_F^{\heartsuit}$ et $Y \in \mathfrak{D}_U^{\heartsuit}$ simples.

Remarque : Si $j\colon U \hookrightarrow X$ et $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_U^{p\heartsuit}$, $j_{!*}\mathscr{F}$ est l'unique extension de $\mathscr{F}$ sans quotient ou sous-objet à support sur $X \setminus U$.

Théorème (Deligne)

Soit $U_n \overset{j}{\hookrightarrow} X$ la réunion des strates S avec $p(S) \leq n$, ouvert de X, et $U_n = X \setminus F_n$; notons $j_n\colon U_n \hookrightarrow U_{n+1}$. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_{U_n}^{p\heartsuit}$ et tout entier $a \geq n$ tel que $a \geq p(S)\,\forall S$, on a

$$j_{!*}\mathscr{F} \simeq {}^p\tau_{\leq a}(j_{a,*}) \cdots {}^p\tau_{\leq n}(j_{n,*})\mathscr{F}.$$

Faisceaux pervers

Constructibilité

$\mathscr{F} \in \mathfrak{D} = \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{constr}}(X)$ est $\mathscr{S}$-constructible si i_S^* est localement constant de rang fini $\forall S \in \mathscr{S}$.
On a $\mathfrak{D} = \bigcup_{\mathscr{S}} \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{S}-\mathrm{constr}}(X)$

Si $\mathscr{S} \preccurlyeq \mathscr{T}$, on a $\mathfrak{D}^{^{p_{\mathscr{S}}/2}\heartsuit} \hookrightarrow \mathfrak{D}^{^{p_{\mathscr{T}}/2}\heartsuit}$. On définit $\mathfrak{M}(X) = \operatorname{colim}_{\mathscr{S}} \mathfrak{D}^{^{p_{\mathscr{S}}/2}\heartsuit}$, la catégorie des complexes constructibles moitié-pervers pour une stratification.

Faisceaux pervers

Constructibilité

$\mathscr{F} \in \mathfrak{D} = \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{constr}}(X)$ est $\mathscr{S}$-constructible si i_S^* est localement constant de rang fini $\forall S \in \mathscr{S}$.
On a $\mathfrak{D} = \bigcup_{\mathscr{S}} \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{S}-\mathrm{constr}}(X)$

Si $\mathscr{S} \preccurlyeq \mathscr{T}$, on a $\mathfrak{D}^{p_{\mathscr{S}}/2 \heartsuit} \hookrightarrow \mathfrak{D}^{p_{\mathscr{T}}/2 \heartsuit}$. On définit $\mathfrak{M}(X) = \mathrm{colim}_{\mathscr{S}} \mathfrak{D}^{p_{\mathscr{S}}/2 \heartsuit}$, la catégorie des complexes constructibles moitié-pervers pour une stratification.

Lemme

$\mathscr{F} \in \mathfrak{D}$ est dans $\mathfrak{D}^{\leq 0}$ ssi $\forall i \in \mathbb{Z}, \dim \operatorname{supp} \mathscr{H}^i(\mathscr{F}) \leq -i$ (condition de support).
$\mathscr{F}$ est dans $\mathfrak{D}^{\geq 0}$ ssi $\forall i \in \mathbb{Z}, \dim \operatorname{supp} \mathscr{H}^i(\mathbb{D}_X \mathscr{F}) \leq -i$ (condition de cosupport).

Faisceaux pervers

Constructibilité

$\mathscr{F} \in \mathfrak{D} = \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{constr}}(X)$ est $\mathscr{S}$-constructible si i_S^* est localement constant de rang fini $\forall S \in \mathscr{S}$.
On a $\mathfrak{D} = \bigcup_{\mathscr{S}} \mathscr{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{S}-\mathrm{constr}}(X)$

Si $\mathscr{S} \preccurlyeq \mathscr{T}$, on a $\mathfrak{D}^{p_{\mathscr{S}}/2\,\heartsuit} \hookrightarrow \mathfrak{D}^{p_{\mathscr{T}}/2\,\heartsuit}$. On définit $\mathfrak{M}(X) = \mathrm{colim}_{\mathscr{S}}\, \mathfrak{D}^{p_{\mathscr{S}}/2\,\heartsuit}$, la catégorie des complexes constructibles moitié-pervers pour une stratification.

Lemme

$\mathscr{F} \in \mathfrak{D}$ est dans $\mathfrak{D}^{\leq 0}$ ssi $\forall i \in \mathbb{Z}, \dim \operatorname{supp} \mathscr{H}^i(\mathscr{F}) \leq -i$ (condition de support).
$\mathscr{F}$ est dans $\mathfrak{D}^{\geq 0}$ ssi $\forall i \in \mathbb{Z}, \dim \operatorname{supp} \mathscr{H}^i(\mathbb{D}_X \mathscr{F}) \leq -i$ (condition de cosupport).

Proposition

$\mathfrak{M}(-)$ est un champ sur X.

Complexes d'intersection

$U \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{i} X$ ouvert d'un fermé de X. Si $\mathscr{L}$ est un système local sur U, alors $\mathscr{L}[\dim U]$ est pervers sur U.

Définition

Le **complexe d'intersection** est $\mathscr{I}\mathscr{C}_{\mathscr{L}} = i_!(j_{!*}(\mathscr{L}[\dim U]))$.

Corollaire

Les objets simples de $\mathfrak{M}(X)$ sont les complexes d'intersection.

Complexes d'intersection

$U \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{i} X$ ouvert d'un fermé de X. Si $\mathscr{L}$ est un système local sur U, alors $\mathscr{L}[\dim U]$ est pervers sur U.

Définition

Le **complexe d'intersection** est $\mathscr{I}\mathscr{C}_{\mathscr{L}} = i_!(j_{!*}(\mathscr{L}[\dim U]))$.

Corollaire

Les objets simples de $\mathfrak{M}(X)$ sont les complexes d'intersection.

Théorème de décomposition de Deligne (Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber)

$f : X \to Y$ morphisme projectif. Alors

$$f_*\mathscr{I}\mathscr{C}_{\Bbbk} \simeq \bigoplus_n {}^{\mathrm{p}}\mathbb{R}^{-n} f_*(\mathscr{I}\mathscr{C}_{\Bbbk})[n] \qquad \text{(en notant } {}^{\mathrm{p}}\mathbb{R}^{-n} f_* = {}^{\mathrm{p}}\mathscr{H}^n \circ f_*\text{).}$$

Section 11: Recollement des catégories dérivées

Produit de spectres

Théorème

Soient $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ deux $(\infty, 1)$-catégories stables présentables. L'$(\infty, 1)$-foncteur $\mathfrak{T} \mapsto \hom^{\text{ex.d,ex.d}}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}, \mathfrak{T})$ est coreprésentable par $\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D} \in \mathfrak{St}_{\text{pr}}$.
Cela fournit une structure monoïdale symétrique sur l'$(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{St}_{\text{pr}}$.

Remarque

On a $\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D} \simeq \mathfrak{Fonc}^{\text{ex.g.}}(\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathfrak{D})$.

Produit de spectres

Théorème

Soient $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ deux $(\infty, 1)$-catégories stables présentables. L'$(\infty, 1)$-foncteur $\mathfrak{T} \mapsto \mathrm{hom}^{\text{ex.d,ex.d}}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}, \mathfrak{T})$ est coreprésentable par $\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D} \in \mathfrak{St}_{\text{pr}}$.
Cela fournit une structure monoïdale symétrique sur l'$(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{St}_{\text{pr}}$.

Remarque

On a $\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D} \simeq \mathfrak{Fonc}^{\text{ex.g.}}(\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathfrak{D})$.

L'unité monoïdale est $\mathfrak{Sp}$. Elle hérite donc d'une structure de monoïde dans $(\mathfrak{St}, \otimes)$, qui correspond à une structure monoïdale $(\mathfrak{Sp}, \wedge)$, appelée le **smash-produit** de spectres.

Produit de spectres

Théorème

Soient $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ deux $(\infty, 1)$-catégories stables présentables. L'$(\infty, 1)$-foncteur $\mathfrak{T} \mapsto \hom^{\text{ex.d,ex.d}}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}, \mathfrak{T})$ est coreprésentable par $\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D} \in \mathfrak{St}_{\text{pr}}$.
Cela fournit une structure monoïdale symétrique sur l'$(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{St}_{\text{pr}}$.

Remarque

On a $\mathfrak{C} \otimes \mathfrak{D} \simeq \mathfrak{Fonc}^{\text{ex.g.}}(\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathfrak{D})$.

L'unité monoïdale est $\mathfrak{Sp}$. Elle hérite donc d'une structure de monoïde dans $(\mathfrak{St}, \otimes)$, qui correspond à une structure monoïdale $(\mathfrak{Sp}, \wedge)$, appelée le **smash-produit** de spectres.

L'unité monoïdale pour $\wedge$ est le spectre des sphères $\mathbb{S}$. On note donc aussi $\wedge = \otimes_{\mathbb{S}}$, et on l'appelle également le produit tensoriel de spectres.

Définition (schémas dérivés)

- Soit k un monoïde de $(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}})$. L'$(\infty, 1)$-catégorie des k-algèbres (dérivées) est $\mathfrak{dAlg}_k := \mathfrak{Mnd}(\mathfrak{Mod}_k(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}}), \otimes_k)$.

Anneaux dérivés et préchamps dérivés

Définition (schémas dérivés)

- Soit k un monoïde de $(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}})$. L'$(\infty, 1)$-catégorie des k-algèbres (dérivées) est $\mathfrak{dAlg}_k \coloneqq \mathfrak{Mnd}(\mathfrak{Mod}_k(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}}), \otimes_k)$.
- L'$(\infty, 1)$-catégorie des schémas affines dérivés sur k est $\mathfrak{dAff}_k \coloneqq \mathfrak{dAlg}_k^{\mathrm{op}}$. On note Spec l'équivalence $\mathfrak{dAlg}_k^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{dAff}_k$.
- On définit $\mathfrak{QCoh}(\operatorname{Spec} A) \coloneqq \mathfrak{Mod}_A$.

Anneaux dérivés et préchamps dérivés

Définition (schémas dérivés)

- Soit k un monoïde de $(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}})$. L'$(\infty, 1)$-catégorie des k-algèbres (dérivées) est $\mathfrak{dAlg}_k \coloneqq \mathfrak{Mnd}(\mathfrak{Mod}_k(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}}), \otimes_k)$.
- L'$(\infty, 1)$-catégorie des schémas affines dérivés sur k est $\mathfrak{dAff}_k \coloneqq \mathfrak{dAlg}_k^{\mathrm{op}}$. On note Spec l'équivalence $\mathfrak{dAlg}_k^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{dAff}_k$.
- On définit $\mathfrak{QCoh}(\operatorname{Spec} A) \coloneqq \mathfrak{Mod}_A$.

L'$(\infty, 1)$-catégorie des **préchamps dérivés** sur k est $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{dAff}_{\mathrm{k}}{}^{\mathrm{op}}, \infty - \mathfrak{Grpd})$.

Définition (schémas dérivés)

- Soit k un monoïde de $(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}})$. L'$(\infty,1)$-catégorie des k-algèbres (dérivées) est $\mathfrak{dAlg}_k := \mathfrak{Mnd}(\mathfrak{Mod}_k(\mathfrak{Sp}, \otimes_{\mathbb{S}}), \otimes_k)$.
- L'$(\infty,1)$-catégorie des schémas affines dérivés sur k est $\mathfrak{dAff}_k := \mathfrak{dAlg}_k^{op}$. On note Spec l'équivalence $\mathfrak{dAlg}_k^{op} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{dAff}_k$.
- On définit $\mathfrak{QCoh}(\operatorname{Spec} A) := \mathfrak{Mod}_A$.

L'$(\infty,1)$-catégorie des **préchamps dérivés** sur k est $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{dAff}_{\mathrm{k}}{}^{op}, \infty - \mathfrak{Grpd})$.

Théorème de densité

Pour toute petite $(\infty,1)$-catégorie $\mathfrak{C}$, pour tout $\mathscr{F} \in \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C}^{op}, \infty - \mathfrak{Grpd})$,

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\simeq} \varinjlim_{\hbar_X \to \mathscr{F}} \hbar_X.$$

Champs dérivés

- Un morphisme d'anneaux dérivés $A \to B$ est **étale** s'il est localement de présentation finie et $\mathbb{L}\Omega^1_{B/A} = 0$.
- La **topologie étale** sur $\mathfrak{dAff}$ a pour recouvrements les $\coprod_\alpha \operatorname{Spec} B_\alpha \to \operatorname{Spec} A$ surjectifs où chaque $A \to B_\alpha$ est étale.

Remarque : $f\colon A \to B$ est étale ssi $\pi_0(f)$ est étale au sens classique et B est un A-module fort, *i.e.* $\pi_\bullet(B) = \pi_\bullet(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B)$.

Champs dérivés

- Un morphisme d'anneaux dérivés $A \to B$ est **étale** s'il est localement de présentation finie et $\mathbb{L}\Omega^1_{B/A} = 0$.
- La **topologie étale** sur $\mathfrak{dAff}$ a pour recouvrements les $\coprod_\alpha \operatorname{Spec} B_\alpha \to \operatorname{Spec} A$ surjectifs où chaque $A \to B_\alpha$ est étale.

Remarque : $f\colon A \to B$ est étale ssi $\pi_0(f)$ est étale au sens classique et B est un A-module fort, *i.e.* $\pi_\bullet(B) = \pi_\bullet(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B)$.

Définition (champs dérivés)

Un préchamp dérivé $\mathscr{F}$ satisfait la descente étale si pour tout recouvrement étale $U = \coprod_\alpha \operatorname{Spec} B_\alpha \to \operatorname{Spec} A = X$, $\mathscr{F}(X)$ est la limite du diagramme simplicial

$$\mathscr{F}(U) = \prod_\alpha \mathscr{F}(B_\alpha) \rightrightarrows \mathscr{F}\Big(U \underset{X}{\times} U\Big) = \prod_{\alpha_0,\alpha_1} \mathscr{F}\Big(B_{\alpha_0} \underset{A}{\otimes} B_{\alpha_1}\Big) \substack{\longrightarrow\\[-2pt] \longleftarrow\\[-2pt] \longrightarrow\\[-2pt] \longleftarrow\\[-2pt] \longrightarrow} \mathscr{F}\Big(U \underset{X}{\times} U \underset{X}{\times} U\Big) \quad \cdots$$

Recollement

Proposition

L'$(\infty, 1)$-catégorie $\mathfrak{St}$ admet toutes les limites ainsi que les petites colimites filtrantes. Elles sont préservées par l'inclusion $\mathfrak{St} \hookrightarrow (\infty, 1) - \mathfrak{Cat}$.

Ainsi l'on peut définir $\mathfrak{QCoh}(\mathscr{X}) := \varprojlim_{\operatorname{Spec} A \to \mathscr{X}} \mathfrak{QCoh}(\operatorname{Spec} A)$; ainsi $\mathfrak{QCoh}$ est l'extension oplaxe de $\mathfrak{Mod}\_$ le long de $\mathfrak{dAff}_k \hookrightarrow \mathfrak{PrChmp}(\mathfrak{dAff}_k)$.

Théorème

L'$(\infty, 1)$-foncteur $\mathfrak{Mod}\_$ satisfait la descente étale (et même fpqc).

- $\mathfrak{QCoh}$ est un champ, et $\mathfrak{QCoh}(\mathscr{X}) = \hom(\mathscr{X}, \mathfrak{QCoh})$.
- $\mathfrak{QCoh}$ est l'extension oplaxe de $\mathfrak{Mod}\_$ le long de $\mathfrak{dAff}_k \hookrightarrow \mathfrak{Chmp}_\tau(\mathfrak{dAff}_k)$ (pour τ moins fine que fpqc).
- Pour tout préchamp $\mathscr{X}$, de faisceautisé fpqc $\mathscr{X}^+$, on a $\mathfrak{QCoh}(\mathscr{X}) \simeq \mathfrak{QCoh}(\mathscr{X}^+)$.

Références

- Antoine Chambert-Loir
- Grégory Ginot
- Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*
- Jacob Lurie, *Higher Algebra*
- Emily Riehl, *Categorical Homotopy Theory*
- The Stacks Project authors
- Greg Stevenson, On the failure of functorial cones in triangulated categories