Théorie des catégories formelle dans les catégories doubles

David Kern

Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques

10 avril 2019

Plan

1. Catégories doubles
2. Équipements de proflèches
3. Multicatégories généralisées
4. Théorie des catégories formelle dans un équipement
5. Version ∞-catégorique

Rappel

$\mathfrak{C}$ une catégorie (avec produits fibrés). Une monade (T, η, μ) sur un objet X dans la 2-catégorie $\mathfrak{Corr}(\mathfrak{C})$ est une catégorie interne dans $\mathfrak{C}$ avec objets X et morphismes T :

$$
\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
& T \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& X(= \mathrm{id}_X) \arrow[u, "\eta"] \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
& T \times_X T = T \circ T \arrow[d, "\mu"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& T \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
$$

Motivation

Rappel

$\mathfrak{C}$ une catégorie (avec produits fibrés). Une monade (T, η, μ) sur un objet X dans la 2-catégorie $\mathfrak{Corr}(\mathfrak{C})$ est une catégorie interne dans $\mathfrak{C}$ avec objets X et morphismes T :

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
,
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & X(= \mathrm{id}_X) \arrow[u, "\eta"] \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
,
\begin{tikzcd}
 & T \times_X T = T \circ T \arrow[d, "\mu"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & T \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
$$

Mais les transformations de monades ne donnent jamais les foncteurs internes

Motivation

Rappel

$\mathfrak{C}$ une catégorie (avec produits fibrés). Une monade (T, η, μ) sur un objet X dans la 2-catégorie $\mathfrak{Corr}(\mathfrak{C})$ est une catégorie interne dans $\mathfrak{C}$ avec objets X et morphismes T :

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ X & & X \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & T \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & X(=\mathrm{id}_X) \arrow[u, "\eta"] \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\ X & & X \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & T \times_X T = T \circ T \arrow[d, "\mu"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & T \arrow[dl, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Mais les transformations de monades ne donnent jamais les foncteurs internes : il faudrait imposer des vrais morphismes de $\mathfrak{C}$

$\Longrightarrow$ Retenir séparément les correspondances *et* les morphismes

Remarque Les bimodules entre monades dans $\mathfrak{Corr}(\mathfrak{C})$ donnent les profoncteurs internes

Sommaire - Section 1 : Catégories doubles

1. Catégories doubles
2. Équipements de proflèches
3. Multicatégories généralisées
4. Théorie des catégories formelle dans un équipement
5. Version ∞-catégorique

Définition

Une catégorie double $\mathbb{C}$ est une catégorie interne à $\mathfrak{Cat}$:

$$\mathbb{C}_0 \underset{d_1 = t}{\overset{d_0 = s}{\leftleftarrows}} \xrightarrow{e} \mathbb{C}_1 \xleftarrow{m} \mathbb{C}_1 \times_{\mathbb{C}_0} \mathbb{C}_1$$

Description explicite

Soit α une flèche de $\mathbb{C}_1$, de source u et cible u'. En appliquant s et t :

$$\begin{tikzcd} s(u) =: C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s(\alpha) =: f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & D := t(u) \arrow[d, "f' := t(\alpha)"] \\ s(u') =: C' \arrow[r, "u'"'] & D' := t(u') \end{tikzcd}$$

- α une (2)-cellule de bord $f \overset{u}{\underset{u'}{\square}} f'$, avec $\circ_v$ et $\circ_h$
- Deux « catégories de bords »
- 3 dualisations $(-)^{\text{h.op}}$, $(-)^{\text{v.op}}$, et $(-)^{\text{t}}$

Pseudo-double catégorie = cat. faible dans $\mathfrak{CAT}$: verticale stricte, horizontale laxe

Catégories doubles et 2-catégories

$\mathfrak{C}$ une 2-catégorie :

- $\mathbb{V}\mathrm{ert}(\mathfrak{C})$ et $\mathbb{H}\mathrm{or}(\mathfrak{C})$ avec flèches verticales ou horizontales non triviales
- $\mathbb{Q}\mathrm{uint}(\mathfrak{C})$ catégorie double des carrés 2-commutatifs de $\mathfrak{C}$: ses catégories de bords coïncident

$\mathbb{C}$ une catégorie double :

- $\mathfrak{Hor}(\mathbb{C})$ 2-catégorie de flèches horizontales et cellules globulaires
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "|" marking] \arrow[r, bend right, "|" marking] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

  $\Longrightarrow$ Équivalence entre 2-catégories et catégories doubles $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{C}_0$ catégorie discrète (*cf.* catégories de Segal)
- $\mathfrak{Vert}(\mathbb{C})$ des flèches verticales et cellules verticalement globulaires

Remarque : Toutes les catégories doubles sont implicitement pseudo
Les 2-catégories sont strictes ; sinon il faudrait des bicatégories doubles

Exemple : les profoncteurs

Un profoncteur $\mathfrak{A} \overset{\mathscr{P}}{\nrightarrow} \mathfrak{B}$ est un foncteur $\mathscr{P} \colon \mathfrak{B}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{Ens}$

Remarques

1. $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{B}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{A}, \mathfrak{Ens}) = \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{A}, \widehat{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{Fonc}^{\mathrm{colim}}(\widehat{\mathfrak{A}}, \widehat{\mathfrak{B}})$
2. Un profoncteur $\mathfrak{A} \nrightarrow \mathfrak{B}$ est une fibration discrète bilatère sur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$

Catégorie double $\mathbb{Prof}$ avec pour

- objets = catégories, flèches verticales = foncteurs, horizontales = profoncteurs
- composition horizontale par cofins : $\mathfrak{A} \overset{\mathscr{P}}{\nrightarrow} \mathfrak{B} \overset{\mathscr{Q}}{\nrightarrow} \mathfrak{C}$

$$(\mathscr{Q} \odot \mathscr{P})(C, A) = \int_{B \in \mathfrak{B}} \mathscr{Q}(C, B) \times \mathscr{P}(B, A)$$

- profoncteurs identiques $\mathscr{e}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(-,-) = \hom_{\mathfrak{A}}(-,-)$
- cellules $\mathscr{F} \underset{\mathscr{Q}}{\overset{\mathscr{P}}{}} \mathscr{G}$ les transformations $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}(\mathscr{G}-, \mathscr{F}-)$

Autres exemples

- $\mathfrak{V}-\mathbb{P}\mathrm{rof}$ des $\mathfrak{V}$-catégories, $\mathfrak{V}$-foncteurs et $\mathfrak{V}$-profoncteurs
- Sous-catégorie double de $\mathfrak{Ab}-\mathbb{P}\mathrm{rof}$ sur les $\mathfrak{Ab}$-catégories à un objet : $\mathbb{B}\mathrm{imod}$ des anneaux, homomorphismes, et bimodules (et leurs homomorphismes)
- $\mathfrak{V}-\mathbb{M}\mathrm{at}$ (où $\otimes$ préserve $\amalg$) des ensembles, fonctions, et matrices de flèches de $\mathfrak{V}$
  Remarque : $\mathfrak{Ens}-\mathbb{M}\mathrm{at} = \mathfrak{Ens}-\mathbb{P}\mathrm{rof}$
- $\mathbb{B}\mathrm{i}\mathbb{C}\mathrm{at}$ des bicatégories, 2-foncteurs laxes et oplaxes
- Catégories de modèles, foncteurs de Quillen à gauche et à droite
- $\mathbb{C}\mathrm{ob}_n$ des n-variétés, homéomorphismes, et cobordismes (et leurs cobordismes)
  $\Longrightarrow$ Cobordismes et TQFTs avec coins
- $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\mathfrak{C})$ dont les flèches horizontales sont les correspondances dans $\mathfrak{C}$

Limites doubles

Clôture cartésienne

$\mathbb{I}$ et $\mathbb{C}$ catégories doubles $\implies$ catégorie double $\mathbb{C}^{\mathbb{I}}$ des foncteurs doubles et transformations horizontales et verticales

Une limite de $\mathscr{F} \in \mathbb{C}^{\mathbb{I}}$ est un objet final de $\mathscr{const} \downarrow \mathscr{F}$

Tabulateurs

Limite du diagramme consistant en une flèche horizontale $C \overset{u}{\nrightarrow} D$

Dans $\mathbb{P}\mathrm{rof}$, le tabulateur d'un profoncteur est sa construction de Grothendieck (*e.g.* pour $e_{\mathfrak{C}} = \hom_{\mathfrak{C}}(-,-)$, catégorie des flèches tordues)

Dans $\mathbb{B}\mathrm{imod}$, le tabulateur de $R \overset{M}{\nrightarrow} S$ donne les dérivations généralisées

Une catégorie double a toutes les (co)limites doubles ssi elle a tous les (co)produits doubles, (co)égalisateurs doubles, et (co)tabulateurs

Sommaire - Section 2 : Équipements de proflèches

1. Catégories doubles
2. Équipements de proflèches
3. Multicatégories généralisées
4. Théorie des catégories formelle dans un équipement
5. Version ∞-catégorique

Compagnons

Paire de compagnons

$f\colon A \to B$ flèche verticale a pour compagnon la flèche horizontale u si l'on se donne des cellules $\eta\colon f \,{}^{u}_{e_B}\, \mathrm{id}_B$ et $\varepsilon\colon \mathrm{id}_A \,{}^{e_A}_{u}\, f$ telles que

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_A", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A \arrow[r, "u", "|" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
A \arrow[r, "u"', "|" marking] & B \arrow[r, "e_B"', "|" marking] & B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_u"] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
A \arrow[r, "u"', "|" marking] & B
\end{tikzcd}
$$

et

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_A", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "u", "|" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\
B \arrow[r, "e_B"', "|" marking] & B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_A", "|" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow e_f"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "e_B"', "|" marking] & B
\end{tikzcd}
$$

Exprime un « isomorphisme orthogonal » entre f et u

Conjonctions

Une conjonction dans $\mathbb{C}$ est une paire de compagnons dans $\mathbb{C}^{\mathrm{h.op}}$, soit des cellules $\eta\colon \begin{array}{ccc} & \mathscr{e}_B & \\ f & & \mathrm{id}_B \\ & u & \end{array}$ et $\varepsilon\colon \begin{array}{ccc} & u & \\ \mathrm{id}_A & & f \\ & \mathscr{e}_A & \end{array}$ telles que

$$\eta \circ_h \varepsilon = \varepsilon | \eta = \mathrm{id}_u\colon \begin{array}{ccc} & u & \\ \mathrm{id}_A & & \mathrm{id}_B \\ & u & \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon \circ_v \eta = \frac{\eta}{\varepsilon} = \mathscr{e}_f\colon \begin{array}{ccc} & \mathscr{e}_A & \\ f & & f \\ & \mathscr{e}_B & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Exprime une « adjonction orthogonale »

Proposition

f flèche verticale, u et v horizontales. Deux propriétés impliquent la troisième :

- u est compagnon de f
- v et f sont conjoints
- adjonction $u \dashv v$ dans $\mathfrak{Hor}(\mathbb{C})$

Équipements

Une catégorie double $\mathbb{C}$ équipe sa 2-catégorie verticale de proflèches si toute flèche verticale f a un compagnon f_* et un conjoint f^*

Caractérisation équivalente

$\mathbb{C}$ est un équipement de proflèches ssi c'est une catégorie double fibrante, *i.e.* toute niche $\begin{array}{ccc} A & & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \underset{u}{\nrightarrow} & D \end{array}$ se complète en une cellule universelle $\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle u(g,f)} & \\ {\scriptstyle f} & & {\scriptstyle g} \\ & {\scriptstyle u} & \end{array}$ (par $u(g,f) = g^* u f_*$)

Équipements

Une catégorie double $\mathbb{C}$ équipe sa 2-catégorie verticale de proflèches si toute flèche verticale f a un compagnon f_* et un conjoint f^*

Caractérisation équivalente

$\mathbb{C}$ est un équipement de proflèches ssi c'est une catégorie double fibrante, *i.e.* toute niche $\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "u"', "\shortmid" marking] & D \end{tikzcd}$ se complète en une cellule universelle $\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "u(g,f)"] \arrow[d, "f"'] & {} \arrow[d, "g"] \\ {} \arrow[r, "u"'] & {} \end{tikzcd}$ (par $u(g,f) = g^* u f_*$)

Exemples

- $\mathbb{P}\mathrm{rof}$ équipe $\mathfrak{CAT}$ de proflèches : le compagnon de $\mathscr{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est $\hom_{\mathfrak{B}}(-, \mathscr{F}-) : \mathfrak{A} \nrightarrow \mathfrak{B}$ et son conjoint est $\hom_{\mathfrak{B}}(\mathscr{F}-, -) : \mathfrak{B} \nrightarrow \mathfrak{A}$
- Dans $\mathbb{C}\mathrm{orr}(\mathfrak{C})$, le compagnon de f est $\bullet \xleftarrow{\mathrm{id}} \bullet \xrightarrow{f} \bullet$ et son conjoint est $\bullet \xleftarrow{f} \bullet \xrightarrow{\mathrm{id}} \bullet$

Propriété universelle des correspondances

Condition de Beck–Chevalley

Un choix de compagnons $(-)_*$ et conjoints $(-)^*$ induit pour tout carré commutatif $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "k"] & \cdot \end{tikzcd}$ de $\mathfrak{Vert}(\mathbb{C})$ une cellule

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "h^*", "\shortmid" marking] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "h"] & \cdot \arrow[r, "f_*", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, equal] \\ \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[d, "k"] & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, equal] \\ \cdot \arrow[r, "k_*", "\shortmid" marking] & \cdot \arrow[r, equal] & \cdot \arrow[r, "g^*", "\shortmid" marking] & \cdot \end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}$ est BC si la cellule est $\circ_v$-inversible lorsque le carré est cartésien

On a une 2-adjonction $\mathbb{C}\mathrm{orr}(-)\colon \mathfrak{Cat}^{\text{prod.fib.}} \rightleftarrows \mathfrak{DblCat}^{\text{BC}} \colon \mathfrak{Vert}(-)$.

Équipements virtuels

Que faire si $\mathfrak{C}$ n'a pas les produits fibrés ?

Équipements virtuels

Que faire si $\mathfrak{C}$ n'a pas les produits fibrés ? Abandonner la composition horizontale et la remplacer par une version formelle

Catégorie double virtuelle

Une catégorie double virtuelle a des cellules
$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d] & A_1 \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] & A_n \arrow[d] \\ B_0 \arrow[rrr, "\shortmid" marking] & & & B_1 \end{tikzcd}$$
et compositions

$$\begin{tikzcd} A_{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A_{0,n_0} = A_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A_{m,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A_{m,n_m} \arrow[d] \\ B_0 \arrow[rr] \arrow[d] & & B_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_m \arrow[rr] & & B_{m+1} \arrow[d] \\ C_0 \arrow[rrrrrr] & & & & & & C_1 \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A_{0,0} \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & A_{n,m_n} \arrow[d] \\ C_0 \arrow[rr, "\shortmid" marking] & & C_1 \end{tikzcd}$$

Aussi opvirtuelles avec les suites en cible et non source

On définit les équipements (op)virtuels en imposant une condition de fibrance, et on a la 2-adjonction $\mathbb{C}\mathrm{orr}(-) : \mathfrak{Cat} \rightleftarrows \mathrm{op}\mathfrak{VirEquip} : \mathfrak{Vert}(-)$.

Sommaire - Section 3 : Multicatégories généralisées

1. Catégories doubles
2. Équipements de proflèches
3. Multicatégories généralisées
4. Théorie des catégories formelle dans un équipement
5. Version ∞-catégorique

Monades cartésiennes

Une monade $(\mathscr{T}, \eta, \mu)$ sur une catégorie $\mathfrak{C}$ est **cartésienne** si :

1. elle préserve les produits fibrés
2. les carrés de naturalité (pour toute flèche $f \colon X \to Y$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ \mathscr{T}X \arrow[r, "\mathscr{T}f"] & \mathscr{T}Y \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{T}^2X \arrow[r, "\mathscr{T}^2f"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \mathscr{T}^2Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\ \mathscr{T}X \arrow[r, "\mathscr{T}f"] & \mathscr{T}Y \end{tikzcd}$$

   sont cartésiens.

- La monade de monoïde libre sur $\mathfrak{Ens}$ est cartésienne, mais pas monoïde commutatif libre
- La monade $\mathscr{fc}$ de catégorie libre sur $\mathfrak{Grph}$ est cartésienne

Correspondances tordues par une monade

La 2-catégorie de Kleisli horizontale a les objets de $\mathfrak{C}$, avec $\hom(X, Y)$ les correspondances $\mathscr{T}X \leftarrow V \to Y$.

Correspondances tordues par une monade

La 2-catégorie de Kleisli horizontale a les objets de $\mathfrak{C}$, avec $\hom(X, Y)$ les correspondances $\mathscr{T}X \leftarrow V \rightarrow Y$. Les identités sont $\mathscr{T}X \xleftarrow{\eta_X} X = X$

Correspondances tordues par une monade

La 2-catégorie de Kleisli horizontale a les objets de $\mathfrak{C}$, avec $\hom(X, Y)$ les correspondances $\mathscr{T}X \leftarrow V \rightarrow Y$. Les identités sont $\mathscr{T}X \xleftarrow{\eta_X} X = X$, et la composition

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathscr{T}V \times_{\mathscr{T}Y} W \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & \mathscr{T}V \arrow[dl] \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \mathscr{T}\mathscr{T}X \arrow[dl, "\mu_X"'] & & \mathscr{T}Y & & Z \\
\mathscr{T}X & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Correspondances tordues par une monade

La 2-catégorie de Kleisli horizontale a les objets de $\mathfrak{C}$, avec $\hom(X, Y)$ les correspondances $\mathscr{T}X \leftarrow V \rightarrow Y$. Les identités sont $\mathscr{T}X \xleftarrow{\eta_X} X = X$, et la composition

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathscr{T}V \times_{\mathscr{T}Y} W \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & \mathscr{T}V \arrow[dl] \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \mathscr{T}\mathscr{T}X \arrow[dl, "\mu_X"'] & & \mathscr{T}Y & & Z \\
 \mathscr{T}X & & & & &
\end{tikzcd}$$

Remarque : C'est la 2-catégorie horizontale d'une catégorie double $\mathbb{HKl}_{\mathbb{Corr}(\mathfrak{C})}(\mathscr{T})$

Remarque : Si $\mathscr{T}$ est une monade sur un équipement virtuel quelconque $\mathbb{C}$, on définit de même la catégorie double virtuelle de Kleisli horizontale $\mathbb{HKl}_{\mathbb{C}}(\mathscr{T})$

Catégories doubles de monades horizontales (ou monoïdes)

Un monoïde sur un objet X dans une catégorie double virtuelle $\mathbb{C}$ est un endomorphisme horizontal T muni de cellules

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[r, "T", "\shortmid"{marking}] & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ X \arrow[rr, "T"', "\shortmid"{marking}] & & X \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \\ X \arrow[rr, "T"', "\shortmid"{marking}] & & X \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Catégorie double virtuelle $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{C})$ des monoïdes, homomorphismes, et bimodules.

On a par exemple $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{C}\mathrm{orr}(\mathfrak{C})) = \mathbb{P}\mathrm{rof}(\mathfrak{C})$

Multicatégories généralisées

Catégories doubles de monades horizontales (ou monoïdes)

Un monoïde sur un objet X dans une catégorie double virtuelle $\mathbb{C}$ est un endomorphisme horizontal T muni de cellules

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[r, "T", "|" marking] & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ X \arrow[rr, "T"', "|" marking] & & X \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \\ X \arrow[rr, "T"', "|" marking] & & X \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Catégorie double virtuelle $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{C})$ des monoïdes, homomorphismes, et bimodules.

On a par exemple $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{C}\mathrm{orr}(\mathfrak{C})) = \mathbb{P}\mathrm{rof}(\mathfrak{C})$

$\mathscr{T}$-multicatégories

La catégorie double des $\mathscr{T}$-multicatégories est $\mathbb{P}\mathrm{rof}_{\mathscr{T}}(\mathbb{C}) \coloneqq \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{H}\mathbb{K}\mathrm{l}_{\mathbb{C}}(\mathscr{T}))$.

Exemple : les $\mathscr{fc}$-multicatégories ($\mathscr{Cat}\,\mathscr{Lib}$-multicatégories)

Une $\mathscr{fc}$-multicatégorie $\mathbb{C}$ consiste en

- une correspondance de graphes $\mathscr{fc}(\mathbb{C}_0) \xleftarrow{\mathscr{s}} \mathbb{C}_1 \xrightarrow{\mathscr{t}} \mathbb{C}_0$,
- une section $\mathscr{e} \colon \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ de $\mathscr{t}$ telle que $\mathscr{se} = \eta_{\mathscr{fc},\mathbb{C}_0}$,
- $\mathscr{m} \colon \mathscr{fc}(\mathbb{C}_1) \times_{\mathscr{fc}(\mathbb{C}_0)} \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_1$ avec compatibilités

Remarque : Il est utile de décomposer les graphes en $\mathbb{C}_0 = (\mathbb{C}_{0,0} \leftleftarrows \mathbb{C}_{0,1})$ et $\mathbb{C}_1 = (\mathbb{C}_{1,0} \leftleftarrows \mathbb{C}_{1,1})$

Exemple : les $\mathcal{fc}$-multicatégories ($\mathcal{Cat\,Lib}$-multicatégories)

Une $\mathcal{fc}$-multicatégorie $\mathbb{C}$ consiste en

- une correspondance de graphes $\mathcal{fc}(\mathbb{C}_0) \xleftarrow{s} \mathbb{C}_1 \xrightarrow{t} \mathbb{C}_0$,
- une section $e \colon \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ de t telle que $se = \eta_{\mathcal{fc},\mathbb{C}_0}$,
- $m \colon \mathcal{fc}(\mathbb{C}_1) \times_{\mathcal{fc}(\mathbb{C}_0)} \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_1$ avec compatibilités

Remarque : Il est utile de décomposer les graphes en $\mathbb{C}_0 = (\mathbb{C}_{0,0} \leftleftarrows \mathbb{C}_{0,1})$ et $\mathbb{C}_1 = (\mathbb{C}_{1,0} \leftleftarrows \mathbb{C}_{1,1})$

On interprète les sommets $\mathbb{C}_{0,0}$ de $\mathbb{C}_0$ comme les objets de $\mathbb{C}$ et ceux $\mathbb{C}_{1,0}$ de $\mathbb{C}_1$ comme ses flèches verticales : $\mathcal{fc}$ laissant constants les sommets, on a une structure de catégorie.

Les arêtes $\mathbb{C}_{1,1}$ de $\mathbb{C}_1$ sont les morphismes horizontaux de $\mathbb{C}$, et celles $\mathbb{C}_{0,1}$ de $\mathbb{C}_0$ sont les cellules, qui ont donc pour source un chemin fini de flèches horizontales et pour cible une flèche horizontale.

Autres exemples

- Une $\mathrm{id}_{\mathfrak{Ens}}$-multicatégorie est une catégorie.
- Soit $\mathscr{M} : \mathfrak{Ens} \to \mathfrak{Ens}$ la monade de monoïde libre. Une $\mathscr{M}$-multicatégorie est une opérade (colorée), ou multicatégorie.

Autres exemples

- Une $\mathrm{id}_{\mathfrak{Ens}}$-multicatégorie est une catégorie.
- Soit $\mathscr{M} : \mathfrak{Ens} \to \mathfrak{Ens}$ la monade de monoïde libre. Une $\mathscr{M}$-multicatégorie est une opérade (colorée), ou multicatégorie.
- Soit $\mathscr{I} : \mathfrak{Ens}^{\mathrm{fin}} \hookrightarrow \mathfrak{Ens}$, et sa monade de codensité $\beta = \mathrm{Lan}_{\mathscr{I}} \mathscr{I}$ la monade des ultrafiltres. On l'étend à la catégorie des ensembles partiellement ordonnés (ou catégories enrichies en valeurs de vérité), et une β-multicatégorie est un espace topologique.

Autres exemples

- Une $\mathrm{id}_{\mathfrak{Ens}}$-multicatégorie est une catégorie.
- Soit $\mathscr{M} : \mathfrak{Ens} \to \mathfrak{Ens}$ la monade de monoïde libre. Une $\mathscr{M}$-multicatégorie est une opérade (colorée), ou multicatégorie.
- Soit $\mathscr{I} : \mathfrak{Ens}^{\mathrm{fin}} \hookrightarrow \mathfrak{Ens}$, et sa monade de codensité $\beta = \mathrm{Lan}_{\mathscr{I}} \mathscr{I}$ la monade des ultrafiltres. On l'étend à la catégorie des ensembles partiellement ordonnés (ou catégories enrichies en valeurs de vérité), et une β-multicatégorie est un espace topologique.

On a aussi la notion de multicatégorie normalisée, qui est en fait plus générale : une $\mathscr{T}$-multicatégorie est une $\mathbb{Mod}(\mathscr{T})$-multicatégorie normalisée. Également une notion de pseudo-$\mathscr{T}$-algèbre, qui a toujours une $\mathscr{T}$-multicatégorie sous-jacente.
Une pseudo-algèbre sur $\mathscr{fc}$ est une catégorie, et une sur $\mathbb{Mod}(\mathscr{fc})$ une pseudo-catégorie double.

Chemins et foncteurs laxes

Pour toute monade $\mathscr{T}$ sur une catégorie $\mathfrak{C}$, on a un foncteur double $\widetilde{\mathscr{T}} \colon \mathbb{HKl}_{\mathbb{C}\mathrm{orr}(\mathfrak{C})}(\mathscr{T}) \to \mathbb{C}\mathrm{orr}(\mathfrak{Alg}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{T}))$, appliquant un objet C sur $\mathscr{T} C$.

Pour $\mathscr{T} = \mathscr{fc}$, on obtient un 2-foncteur $\mathscr{Chemin} = \mathbb{M}\mathrm{od}(\widetilde{\mathscr{fc}}) \colon \mathfrak{Vir} \to \mathfrak{Dbl}$.

On a aussi une inclusion $\mathscr{Laxe} \colon \mathfrak{Dbl} \to \mathfrak{Vir}$, telle que les morphismes $\mathscr{Laxe}\,\mathbb{A} \to \mathscr{Laxe}\,\mathbb{B}$ correspondent aux foncteurs doubles laxes $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$

Chemins et foncteurs laxes

Pour toute monade $\mathscr{T}$ sur une catégorie $\mathfrak{C}$, on a un foncteur double $\widetilde{\mathscr{T}}\colon \mathbb{HKl}_{\mathbb{Corr}(\mathfrak{C})}(\mathscr{T}) \to \mathbb{Corr}(\mathfrak{Alg}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{T}))$, appliquant un objet C sur $\mathscr{T}C$.

Pour $\mathscr{T} = \mathscr{fc}$, on obtient un 2-foncteur $\mathscr{Chemin} = \mathrm{Mod}(\widetilde{\mathscr{fc}})\colon \mathfrak{Vir} \to \mathfrak{Dbl}$.

On a aussi une inclusion $\mathscr{Laxe}\colon \mathfrak{Dbl} \to \mathfrak{Vir}$, telle que les morphismes $\mathscr{Laxe}\mathbb{A} \to \mathscr{Laxe}\mathbb{B}$ correspondent aux foncteurs doubles laxes $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$

Théorème (Strictification des catégories doubles virtuelles)

- $\mathscr{Chemin}$ est 2-adjoint à gauche de $\mathscr{Lax}$, avec 2-comonade notée $\mathscr{K}$
- l'adjonction est 2-comonadique, *i.e.* $\mathfrak{Vir}$ est la 2-catégorie des $\mathscr{K}$-cogèbres
- $\mathscr{K}$ est laxe idempotente, expliquant qu'être une catégorie double soit une *propriété*

Remarque : $\mathscr{K}$ étend l'adjonction (co)mondadique $\mathfrak{Grph} \rightleftarrows \mathfrak{Cat}$

Sommaire - Section 4 : Théorie des catégories formelle dans un équipement

1. Catégories doubles
2. Équipements de proflèches
3. Multicatégories généralisées
4. Théorie des catégories formelle dans un équipement
5. Version ∞-catégorique

Relèvements de proflèches

Soient $f : A \nrightarrow C$ et $k : B \nrightarrow C$ deux flèches horizontales dans une catégorie double virtuelle. Un **relèvement** de f le long de k est une cellule universelle

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r", "|"' marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "k", "|"' marking] & C \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \\ A \arrow[rr, "f"', "|" marking] & & C \end{tikzcd},$$

i.e. toute autre suite de proflèches $A \nrightarrow \cdots \nrightarrow B$ munie d'une telle cellule se factorise de façon unique.

On définit une **extension** comme un relèvement dans la catégorie horizontalement duale.

Remarque : Dû à l'asymétrie de la définition des catégories doubles virtuelles, on ne peut pas spécifier de direction des extensions ou relèvements.
Les propriétés d'adjonction des équipements virtuels vont nous permettre de relever le compagnon ou le conjoint d'une flèche verticale.

Rappel sur les proflèches représentables d'un équipement virtuel

Dans un équipement virtuel, toute niche à gauche se remplit à une cellule de bord supérieur $\mathscr{h}(g, f)\colon A \relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow B$, universelle pour tous les remplissages à droite.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "\mathscr{h}"', "|" marking] & D
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r, "|" marking] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[rr, "\mathscr{h}"', "|" marking] & & D
\end{tikzcd}
$$

Proposition

On a une adjonction $\ell\colon A \rightleftarrows C\colon r$ dans la 2-catégorie verticale ssi $\mathscr{e}_C(\ell, \mathrm{id}_C) = \mathscr{e}_A(\mathrm{id}_A, r)$

Soit $\mathfrak{K}$ un ∞-cosmos. On peut y définir une notion de fibration bilatère discrète, qui équipe virtuellement la 2-catégorie d'homotopie $\mathrm{Ho}\,\mathfrak{K}$ de proflèches.
ALors toute biéquivalence $\mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ induit une équivalence d'équipements virtuels.

Limites pondérées par des profoncteurs

Soient $\mathscr{W} : \mathfrak{I} \nrightarrow \mathfrak{B}$ un profoncteur et $\mathscr{D} \colon \mathfrak{I} \to \mathfrak{A}$. La limite de $\mathscr{D}$ pondérée par $\mathscr{W}$ est un foncteur $\lim^{\mathscr{W}} \mathscr{D} \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tel que les profoncteurs $\hom_{\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_A, \lim^{\mathscr{W}} \mathscr{D})$ et $\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{I}}(\mathscr{W}, \hom_{\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_A, \mathscr{D}))$ sont isomorphes.

On a utilisé le « hom interne mixte » $\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{P}}$ défini relativement à la composition $\circledcirc$, soit : pour $\mathscr{K} : \mathfrak{P} \nrightarrow \mathfrak{M}$ et $\mathscr{L} : \mathfrak{P} \nrightarrow \mathfrak{N}$, le profoncteur $\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{P}}(\mathscr{K}, \mathscr{L}) \colon \mathfrak{M} \nrightarrow \mathfrak{N}$ (*i.e.* $\mathfrak{N}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{Ens}$) est défini par

$$\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{P}}(\mathscr{K}, \mathscr{L})(n, m) = \int_{p \in \mathfrak{P}} \hom_{\mathfrak{Ens}}\big(\mathscr{K}(m, p), \mathscr{L}(n, p)\big)$$

Limites pondérées par des profoncteurs

Soient $\mathscr{W}\colon \mathfrak{I} \nrightarrow \mathfrak{B}$ un profoncteur et $\mathscr{D}\colon \mathfrak{I} \to \mathfrak{A}$. La limite de $\mathscr{D}$ pondérée par $\mathscr{W}$ est un foncteur $\lim^{\mathscr{W}} \mathscr{D}\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tel que les profoncteurs $\hom_{\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_A, \lim^{\mathscr{W}} \mathscr{D})$ et $\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{I}}(\mathscr{W}, \hom_{\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_A, \mathscr{D}))$ sont isomorphes.

On a utilisé le « hom interne mixte » $\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{P}}$ défini relativement à la composition $\circledcirc$, soit : pour $\mathscr{K}\colon \mathfrak{P} \nrightarrow \mathfrak{M}$ et $\mathscr{L}\colon \mathfrak{P} \nrightarrow \mathfrak{N}$, le profoncteur $\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{P}}(\mathscr{K}, \mathscr{L})\colon \mathfrak{M} \nrightarrow \mathfrak{N}$ (*i.e.* $\mathfrak{N}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{Ens}$) est défini par

$$\mathscr{H}\!om_{\mathfrak{P}}(\mathscr{K}, \mathscr{L})(n, m) = \int_{p \in \mathfrak{P}} \hom_{\mathfrak{Ens}}\big(\mathscr{K}(m, p), \mathscr{L}(n, p)\big)$$

Soit $\mathfrak{H}$ une catégorie contenant $[1]$ comme sous-catégorie pleine et $\mathfrak{J}$ la sous-catégorie pleine excluant 1. Les inclusions fournissent $\mathscr{N}\colon [1] \nrightarrow \mathfrak{J}$ et $\mathscr{D}\colon \mathfrak{J} \nrightarrow [1]$. Si $f\colon [1] \to \mathfrak{C}$ est une flèche de $\mathfrak{C}$, sa limite pondérée par $\mathscr{N}$ est son $\mathfrak{H}$-**noyau supérieur**. Dualement, la colimite d'une « donnée de cohérence » $\mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ pondérée par $\mathscr{D}$ est son objet de codescente.

Limites pondérées dans un équipement virtuel

On travaille dans un équipement virtuel.

La limite d'une flèche verticale $d\colon I \to A$ pondérée par une proflèche $w\colon I \nrightarrow B$ est une flèche $\lim^w d\colon B \to A$ telle que $(\lim^w d)_* = e_A(\mathrm{id}_A, \lim^w d)$ soit une extension de w le long de d_*.
La colimite de $d\colon I \to A$ pondérée par $w\colon B \nrightarrow I$ est $\lim_w d\colon B \to A$ telle que $(\lim_w d)^*$ soit un relèvement de d^* le long de w.

- Si w est représentable w_* ou w^*, alors $\lim^{w^*} d = dw$, et $\lim^{w_*} e$ est l'extension (de Kan) droite point-à-point de e le long de w.
- Dans $\mathfrak{V} - \mathbb{Prof}$, si B est l'unité monoïdale, on retrouve les limites pondérées par un $\mathfrak{V}$-copréfaisceau sur $\mathfrak{I}$

Sommaire - Section 5 : Version ∞-catégorique

1. Catégories doubles
2. Équipements de proflèches
3. Multicatégories généralisées
4. Théorie des catégories formelle dans un équipement
5. Version ∞-catégorique

Notations

- Un morphisme $\phi\colon [m] \leftarrow [n]$ dans Δ^{op} est **inerte** si c'est l'opposé de l'inclusion $\phi^{op}\colon [n] \to [m]$ d'un sous-intervalle : $\phi^{op}(\ell) = \phi^{op}(0) + \ell$
- Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $\rho_i\colon [1] \leftarrow [n]$ l'opposé de $\{i-1, i\} \hookrightarrow [n]$.
- $\mathfrak{G}$ la sous-catégorie pleine de Δ^{op} sur $[0], [1]$

Une ∞-catégorie double virtuelle est un ∞-foncteur $\wp\colon \mathbb{O}^{\otimes} \to \Delta^{op}$ tel que

1. pour tout $\phi\colon [m] \leftarrow [n]$ inerte et $X \in \mathbb{O}^{\otimes}_{[m]}$, $\exists$ un relèvement $\wp$-cocartésien $X \to \phi_! X$
2. $\mathbb{O}^{\otimes}_{[n]} \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{[n] \leftarrow [i] \in \mathfrak{G}_{[n]/}} \mathbb{O}^{\otimes}_{[i]} \simeq \mathbb{O}^{\otimes}_{[1]} \times_{\mathbb{O}^{\otimes}_{[0]}} \cdots \times_{\mathbb{O}^{\otimes}_{[0]}} \mathbb{O}^{\otimes}_{[1]}$ pour tout n
3. $\mathrm{Map}^{\phi}(X, Y) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{\alpha \in \mathfrak{G}_{[m]/}} \mathrm{Map}^{\alpha\phi}(X, \alpha_! Y)$ pour tous $\phi\colon [n] \leftarrow [m]$ inerte et $X, Y \in \mathbb{O}^{\otimes}_{[n],[m]}$

Interprétation du découpage de Segal

La troisième condition est équivalente aux décompositions suivantes, pour tous X, Y.
Pour tout $1 \leq i \leq n$, fixons Y_i relèvement de Y le long de $[0] \ni 0 \mapsto i \in [n]$. Alors le carré suivant doit être cartésien.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}_{\mathbb{O}^{\otimes}}(X, Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}_{\mathbb{O}^{\otimes}}(X, \rho_{1,!}Y) \underset{\mathrm{Map}_{\mathbb{O}^{\otimes}}(X, Y_1)}{\times} \cdots \underset{\mathrm{Map}_{\mathbb{O}^{\otimes}}(X, Y_{n-1})}{\times} \mathrm{Map}_{\mathbb{O}^{\otimes}}(X, \rho_{n,!}Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Map}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n], [m]) \arrow[r] & \mathrm{Map}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n], [1]) \underset{\mathrm{Map}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n], [0])}{\times} \cdots \underset{\mathrm{Map}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n], [0])}{\times} \mathrm{Map}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n], [1])
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{O}^{\otimes}_{[0]}$ est l'∞-catégorie des objets et flèches verticales, $\mathbb{O}^{\otimes}_{[0]}$ celle des flèches horizontales et 2-cellules, puis $\mathbb{O}^{\otimes}_{[n>1]}$ l'∞-catégorie des suites de n flèches horizontales composables.
Alors une 2-cellule de X dans Y doit toujours pouvoir se décomposer comme produit de 2-cellules vers *une* flèche horizontale : la source X reste une suite de flèches.

Exemples

- Une ∞-catégorie double est une ∞-catégorie double virtuelle $p\colon \mathbb{O}^{\otimes} \to \Delta^{\mathrm{op}}$ telle que p est une fibration cocartésienne.
- Une ∞-opérade (non-symmétrique) est une ∞-catégorie double virtuelle $p\colon \mathbb{O}^{\otimes} \to \Delta^{\mathrm{op}}$ telle que $\mathbb{O}^{\otimes}_{[0]}$ soit contractile
- Une ∞-catégorie monoïdale est une ∞-catégorie double virtuelle qui est une ∞-catégorie double et une ∞-opérade

Exemples

- Une ∞-catégorie double est une ∞-catégorie double virtuelle $p\colon \mathbb{O}^{\otimes} \to \Delta^{\mathrm{op}}$ telle que p est une fibration cocartésienne.
- Une ∞-opérade (non-symmétrique) est une ∞-catégorie double virtuelle $p\colon \mathbb{O}^{\otimes} \to \Delta^{\mathrm{op}}$ telle que $\mathbb{O}^{\otimes}_{[0]}$ soit contractile
- Une ∞-catégorie monoïdale est une ∞-catégorie double virtuelle qui est une ∞-catégorie double et une ∞-opérade

Correspondances dans une ∞-catégorie avec produits fibrés $\mathfrak{C}$

1. Dans les quasicatégories, $\vartheta\colon \Delta \to \Delta$, $[n] \mapsto [n] \star [n]^{\mathrm{op}}$ définit les flèches tordues : $\mathfrak{Tw}(\mathfrak{Q}_\bullet)_\bullet = \vartheta^*(\mathfrak{Q}_\bullet) = \mathfrak{Q}_\bullet \circ \vartheta$. Les correspondances sont l'adjoint à droite $\vartheta_*(\mathfrak{Q}_\bullet)$, *i.e.* $\mathfrak{Corr}(\mathfrak{Q}_\bullet)_n = \hom(\Delta^n_\bullet, \vartheta_*\mathfrak{Q}_\bullet) = \hom(\mathfrak{Tw}(\Delta^n_\bullet)_\bullet, \mathfrak{Q}_\bullet)$.
2. $\mathfrak{Tw}(\Delta^\bullet_\bullet)$ est un ensemble bi(co)simplicial, vu comme catégorie cosimpliciale. On pose $\mathfrak{CORR}(\mathfrak{C})_\bullet = \mathfrak{Fonc}_\infty(\mathfrak{Tw}(\Delta^\bullet), \mathfrak{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Cat}_\infty$. Alors $\mathfrak{Corr}(\mathfrak{C})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{el}(\mathfrak{CORR}(\mathfrak{C})_\bullet)$ sur les foncteurs respectant des conditions de Segal.

Objets de Segal

Un $\mathbb{O}$-objet de Segal dans un ∞-catégorie $\mathfrak{C}$ munie de produits fibrés est un ∞-foncteur $\mathcal{S} \colon \mathbb{O}^{\otimes} \to \mathfrak{C}$ tel que pour tout $X \in \mathbb{O}^{\otimes}_{[n]}$,

$$\mathcal{S}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{S}(\rho_{1,!}X) \times_{\mathcal{S}(X_1)} \cdots \times_{\mathcal{S}(X_{n-1})} \mathcal{S}(\rho_{n,!}X)$$

Notons $\mathfrak{Seg}_{\mathbb{O}}(\mathfrak{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Fonc}(\mathbb{O}^{\otimes}, \mathfrak{C})$ sur les objets de Segal

Théorème

$$\mathfrak{Seg}_{\mathbb{O}}(\mathfrak{C}) \simeq \mathfrak{Alg}_{\mathbb{O}}(\mathbb{Corr}(\mathfrak{C}))$$

Pour $\mathbb{O}^{\otimes} = \Delta^{\mathrm{op}}$ l'∞-catégorie double virtuelle terminale, on obtient $\mathfrak{Cat}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{Alg}(\mathbb{Corr}(\mathfrak{C}))$.

Références

- Geoff Cruttwell, Michael Shulman, *A unified framework for generalized multicategories*
- Robert Dawson, Robert Paré, Dorette Pronk, *Paths in double categories*
- Robert Dawson, Robert Paré, Dorette Pronk, *The span construction*
- David Gepner, Rune Haugseng, *Enriched ∞-categories via non-symmetric ∞-operads*
- Marco Grandis, Robert Paré, *Limits in double categories*
- Rune Haugseng, *Segal spaces, spans, and semicategories*
- Tom Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*
- Emily Riehl, Mike Shulman, *Weighted limits and colimits*
- Emily Riehl, Dominic Verity, *Elements of ∞-category theory*
- Mike Shulman, *Equipments*