

Objets de codescente et résolutions bar

David KERN

28 février 2020

Table des matières

1	Noyaux supérieurs et leurs objets de codescente	1
1.1	Rappels sur les (co)limites pondérées	1
1.2	Objets de codescente et systèmes de factorisation	4
2	Classificateurs de morphismes laxes	5
2.1	2-monades et leurs algèbres	5
2.2	Objets de codescente stricts des données de cohérence	7
2.3	Objets de codescente laxes	10
3	Vers une interprétation homotopique	10
3.1	2-catégories de modèles strictes	10
3.2	Catégorie d'homotopie des algèbres strictes	11
3.3	Morphismes faibles pour les systèmes de factorisation faibles algébriques	11
	Références	13

Remarque 1 (Notation). Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note \mathbf{n} la catégorie discrète avec n objets $\{0, \dots, n-1\}$ et \mathbf{n} la catégorie engendrée par le graphe $(0 \rightarrow \dots \rightarrow n-1)$, qui coïncide avec l'ensemble partiellement ordonné $[n-1] = (0 < \dots < n-1)$.

1 Noyaux supérieurs et leurs objets de codescente

1.1 Rappels sur les (co)limites pondérées

Soit $(\mathcal{V}, \otimes, I_{\mathcal{V}})$ un cosmos de Bénabou, c'est-à-dire une catégorie monoïdale symétrique fermée bicomplète. Rappelons qu'un \mathcal{V} -profoncteur entre deux \mathcal{V} -catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} , noté $\mathcal{F} : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$, est défini comme un \mathcal{V} -foncteur $\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ (ou de façon équivalente, par clôture cartésienne de $\mathcal{V} - \text{Cat}$, un \mathcal{V} -foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V} - \text{Pr}\mathfrak{Faisc}(\mathcal{B})$, où $\mathcal{V} - \text{Pr}\mathfrak{Faisc}(-)$ indique la \mathcal{V} -catégorie des \mathcal{V} -préfaisceaux), et que la composition

de \mathfrak{V} -profoncteurs $\mathfrak{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathfrak{B} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathfrak{C}$ est donnée en prenant terme-à-terme le produit tensoriel de \mathfrak{V} -foncteurs, c'est-à-dire les \mathfrak{V} -cofins :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(C, A) = \mathcal{G}(C, -) \otimes_{\mathfrak{B}} \mathcal{F}(-, A) = \int^{B \in \mathfrak{B}} \mathcal{G}(C, B) \otimes \mathcal{F}(B, A). \quad (1)$$

Exemple 2. Si $\mathcal{f}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ est un \mathfrak{V} -foncteur, on note $\mathcal{f}_* = \text{hom}_{\mathfrak{B}}(\text{id}_{\mathfrak{B}}, \mathcal{f}): \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ son compagnon et $\mathcal{f}^* = \text{hom}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{f}, \text{id}_{\mathfrak{A}}): \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ son conjoint (adjoint à droite de \mathcal{f}_* dans la 2-catégorie des \mathfrak{V} -profoncteurs entre \mathfrak{V} -catégories).

Remarque 3. Le lemme de Yoneda $\int_{C \in \mathfrak{C}} \mathcal{f}(C) \otimes \text{hom}_{\mathfrak{C}}(\text{id}_{\mathfrak{C}}, C) = \mathcal{f} \otimes_{\mathfrak{C}} \text{hom}_{\mathfrak{C}} \simeq \mathcal{f}$ (pour tout \mathfrak{V} -préfaisceau \mathcal{f} sur \mathfrak{C}) implique que pour tout \mathfrak{V} -profoncteur $\mathcal{K}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$ et tous \mathfrak{V} -foncteurs $\mathcal{g}: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{M}$ et $\mathcal{h}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{P}$ on a un isomorphisme $\mathcal{K}(\mathcal{h}, \mathcal{g}) = \mathcal{h}^* \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{g}_*$ de \mathfrak{V} -profoncteurs $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{N}$.

Construction 4 (Hom internes des profoncteurs). Afin d'exprimer la propriété universelle devant définir les (co)limites pondérées, il faut munir la catégorie des \mathfrak{V} -profoncteurs d'une structure fermée (pour la composition); comme l'opération de composition de profoncteurs n'est pas symétrique il y aura deux adjonctions à considérer, donnant deux hom internes pour les variables différentes.

Considérons trois \mathfrak{V} -profoncteurs $\mathcal{J}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, $\mathcal{K}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{M}$ et $\mathcal{L}: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{N}$; on cherche à avoir des isomorphismes \mathfrak{V} -naturels

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathfrak{V}\text{-}\mathfrak{P}\text{rof}(\mathfrak{P}, \mathfrak{N})}(\mathcal{J} \circ \mathcal{K}, \mathcal{L}) &\simeq \text{hom}_{\mathfrak{V}\text{-}\mathfrak{P}\text{rof}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})}(\mathcal{J}, \mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{K}, \mathcal{L})) \\ &\simeq \text{hom}_{\mathfrak{V}\text{-}\mathfrak{P}\text{rof}(\mathfrak{P}, \mathfrak{M})}(\mathcal{K}, \mathcal{H}\text{om}^{\mathfrak{N}}(\mathcal{J}, \mathcal{L})). \end{aligned} \quad (2)$$

En d'autres termes, on demande que $\mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ soit une extension laxe de \mathcal{L} le long de \mathcal{K} et que $\mathcal{H}\text{om}^{\mathfrak{N}}(\mathcal{J}, \mathcal{L})$ soit un relèvement laxe de \mathcal{L} le long de \mathcal{J} (dans la 2-catégorie $\mathfrak{V} - \mathfrak{P}\text{rof}$ des \mathfrak{V} -catégories, \mathfrak{V} -profoncteurs, et transformations \mathfrak{V} -naturelles, ou plutôt dans l'équipement de profèches dont elle forme la 2-catégorie horizontale).

En identifiant $\mathfrak{V} - \mathfrak{P}\text{rof}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ avec $\mathfrak{V} - \mathfrak{F}\text{onc}(\mathfrak{B}^{\text{op}} \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ et donc les hom-objets entre profoncteurs avec les fins $\text{hom}_{\mathfrak{V}\text{-}\mathfrak{P}\text{rof}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \int_{(B, A) \in \mathfrak{B}^{\text{op}} \otimes \mathfrak{A}} \text{hom}_{\mathfrak{V}}(\mathcal{F}(B, A), \mathcal{G}(B, A))$, on déduit par le théorème de Fubini que le profoncteur $\mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{K}, \mathcal{L}): \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ (i.e. $\mathfrak{N}^{\text{op}} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{V}$) est défini par les fins

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{K}, \mathcal{L})(N, M) &= \int_{P \in \mathfrak{P}} \text{hom}_{\mathfrak{V}}(\mathcal{K}(M, P), \mathcal{L}(N, P)) \\ &= \text{hom}_{\mathfrak{V}\text{-}\mathfrak{P}\text{r}\mathfrak{F}\text{aisc}(\mathfrak{P})}(\mathcal{K}(M, \text{id}_{\mathfrak{P}}), \mathcal{L}(N, \text{id}_{\mathfrak{P}})) \end{aligned} \quad (3)$$

et $\mathcal{H}\text{om}^{\mathfrak{N}}(\mathcal{J}, \mathcal{L}): \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{M}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\text{om}^{\mathfrak{N}}(\mathcal{J}, \mathcal{L})(M, P) &= \int_{N \in \mathfrak{N}} \text{hom}_{\mathfrak{V}}(\mathcal{L}(N, P), \mathcal{J}(N, M)) \\ &= \text{hom}_{\mathfrak{V}\text{-}\mathfrak{P}\text{r}\mathfrak{F}\text{aisc}(\mathfrak{N})}(\mathcal{L}(\text{id}_{\mathfrak{N}}, P), \mathcal{J}(\text{id}_{\mathfrak{N}}, M)). \end{aligned} \quad (4)$$

Remarque 5. Le lemme de Yoneda implique que pour tout \mathfrak{V} -profoncteur $\mathcal{K}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$ et tous \mathfrak{V} -foncteurs $\mathcal{g}: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{M}$ et $\mathcal{h}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{P}$ on a un isomorphisme $\mathcal{K}(\mathcal{h}, \mathcal{g}) \simeq \mathcal{H}\text{om}^{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}\text{om}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{g}^*, \mathcal{K}), \mathcal{h}_*)$.

Définition 6 (Limite pondérée). Soient $d: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ un \mathcal{V} -foncteur et $\mathcal{W}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ un \mathcal{V} -profoncteur. Une limite de d pondérée par \mathcal{W} est un \mathcal{V} -foncteur $\lim^{\mathcal{W}} d: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tel que les \mathcal{V} -profoncteurs $(\lim^{\mathcal{W}} d)_* = \text{hom}_{\mathcal{A}}(\text{id}_{\mathcal{A}}, \lim^{\mathcal{W}} d)$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{I}}(\mathcal{W}, d_*) = \mathcal{H}om_{\mathcal{I}}(\mathcal{W}, \text{hom}_{\mathcal{A}}(\text{id}_{\mathcal{A}}, d))$ soient isomorphes.

Soit $\mathcal{P}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}$ un \mathcal{V} -profoncteur. Une colimite de d pondérée par \mathcal{P} est un \mathcal{V} -foncteur $\text{colim}_{\mathcal{P}} d: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tel que les \mathcal{V} -profoncteurs $(\text{colim}_{\mathcal{P}} d)^*$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{I}}(\mathcal{P}, d^*)$ soient isomorphes.

Lemme 7 (Autres caractérisation des limites pondérées). Un \mathcal{V} -foncteur $\ell: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ est une limite de d pondérée par \mathcal{W} si et seulement si ℓ_* définit une extension laxe de \mathcal{W} le long de d_* .

Démonstration. Immédiat par définition des (co)limites pondérées et propriétés d'adjonction des profoncteurs hom . \square

Exemple 8 (Poids représentables, [RS08, §6.2]). Si $\mathcal{W} = j^*$ pour $j: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}$, alors $\lim^{j^*} d = d \circ j$. Si $\mathcal{W} = k_*$ pour $k: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ alors $\lim^{k_*} d$ est une extension laxe (point-à-point) de d le long de k .

Dualement, pour $\mathcal{P} = j_*$ on a $\text{colim}_{j_*} d = d \circ j$ et pour $\mathcal{P} = k^*$ la colimite de d pondérée par k^* est l'extension oplaxe de d le long de k .

Exemple 9. Supposons que $\mathcal{B} = *$ est la \mathcal{V} -catégorie triviale, de sorte que $\mathcal{W}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ soit un \mathcal{V} -foncteur $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{V}$, et $\mathcal{P}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}$ un \mathcal{V} -foncteur $\mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}$. On retrouve alors les notions plus habituelles de (co)limites pondérées par des \mathcal{V} -pré(co)faisceaux, qui sont des \mathcal{V} -foncteurs $* \rightarrow \mathcal{A}$, c'est-à-dire des objets de \mathcal{A} , munis d'isomorphismes \mathcal{V} -naturels

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(-, \lim^{\mathcal{W}} d) \simeq \text{hom}_{\mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{V})}(\mathcal{P}, \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, d)) \quad (5)$$

et

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(\text{colim}_{\mathcal{P}} d, -) \simeq \text{hom}_{\mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}^{\text{op}}, \mathcal{V})}(\mathcal{P}, \text{hom}_{\mathcal{A}}(d, -)). \quad (6)$$

Exemple 10. — Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{V}$, on a $\lim^{\mathcal{W}} d \text{ hom}_{\mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{V})} = \text{hom}_{\mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{V})}(\mathcal{W}, d)$.

Dans une \mathcal{V} -catégorie quelconque \mathcal{A} , les colimites pondérées sont définies de manière représentable, c'est-à-dire que $L = \lim^{\mathcal{W}} d$ si et seulement si il coreprésente le \mathcal{V} -foncteur $\lim^{\mathcal{W}} \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, d)$. En particulier, si \mathcal{W} est (co)représentable par $A \in \mathcal{A}$, on a par Yoneda $\lim^{\text{hom}(A, -)} d = \text{colim}^{\text{hom}(-, A)} d = d(A)$.

— Si $\mathcal{I} = *$, de sorte que \mathcal{W} et \mathcal{P} sont des objets $W = \mathcal{W}(*), P = \mathcal{P}(*)$ de \mathcal{V} et d est un objet $D = d(*)$ de \mathcal{C} , alors $\lim^{\mathcal{W}} d = W \pitchfork D$ est le cotenseur (ou puissance) de W et D , et $\text{colim}_{\mathcal{P}} d = P \otimes D$ est le tenseur (ou copuissance) de P avec D . Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{V}$, le tenseur est donné par le produit monoïdal et le cotenseur par le hom interne.

Corollaire 11 (Calcul des limites pondérées). Supposons que \mathcal{A} admette les limites pondérées par des \mathcal{V} -précofaisceaux. Soit $\mathcal{W}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ un poids, qui correspond par curryfication au \mathcal{V} -foncteur $\widetilde{\mathcal{W}}: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{V})$. Alors le \mathcal{V} -foncteur $\lim^{\mathcal{W}} (-): \mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{B}^{\text{op}}, \mathcal{A})$ est donné (après curryfication) par le composé

$$\mathcal{B}^{\text{op}} \otimes \mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{W}} \otimes \text{id}} \mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{V}) \otimes \mathcal{V} - \mathfrak{F}onc(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\lim^-(\cdot)} \mathcal{V}; \quad (7)$$

c'est-à-dire que $\lim^{\mathcal{W}} d : \mathcal{B} \mapsto \lim^{\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{B})} d$.

On peut donc voir les limites pondérées générales comme des limites pondérées par des précofaisceaux paramétrés par \mathcal{B} .

1.2 Objets de codescente et systèmes de factorisation

Soit \mathcal{C} une classe de flèches de \mathcal{V} contenant les isomorphismes, que l'on voit comme une sous- \mathcal{V} -catégorie pleine de $\mathcal{V} - \mathfrak{Fonc}(\mathbf{2}, \mathcal{V})$ (où l'on écrit également $\mathbf{2}$ pour la \mathcal{V} -catégorie librement engendrée par la catégorie $\mathbf{2}$). L'application d'évaluation $\mathbf{2} \otimes \mathcal{C} \subset \mathbf{2} \otimes \mathcal{V} - \mathfrak{Fonc}(\mathbf{2}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}$ détermine un \mathcal{V} -profoncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{V}} : \mathbf{2} \dashrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$, ainsi que son dual $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \dashrightarrow \mathbf{2}$.

Définition 12. Soit \mathcal{C} une \mathcal{V} -catégorie.

1. Si f est une flèche de \mathcal{C} , correspondant à un \mathcal{V} -foncteur $\ulcorner f \urcorner : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{C}$, son **\mathcal{C} -noyau** est la limite pondérée $\ker_{\mathcal{C}} f = \lim^{\mathcal{E}_{\mathcal{V}} \ulcorner f \urcorner} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$.
2. Pour tout \mathcal{V} -foncteur $\mathcal{K} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, son **\mathcal{C} -quotient** est la colimite pondérée $Q_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \lim_{\mathcal{E}_{\mathcal{V}}^{\text{op}}} \mathcal{K} : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{C}$, vue comme une flèche de \mathcal{C} .

Corollaire 13. Pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$, on a $\ker_{\mathcal{C}} f(\alpha) = \lim^{\ulcorner \alpha \urcorner \ulcorner f \urcorner}$ est le cotenseur de α et f .

Pour $i = 0, 1 \in \mathbf{2}$, on a $Q_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})(i) = \lim_{\mathcal{E}_{\mathcal{V}}(i, -)} \mathcal{K}$.

Proposition 14 ([Dup02, Théorème 3.19]). Si \mathcal{C} admet tous les \mathcal{C} -noyaux et tous les \mathcal{C} -quotients, ces constructions définissent une \mathcal{V} -adjonction $Q_{\mathcal{C}} \dashv \ker_{\mathcal{C}}$. \square

Lemme 15 ([Dup02, Lemmes 3.8, 3.20]). Soit f une flèche de \mathcal{C} . Alors $(\ker_{\mathcal{C}} f)(\text{id}_{I_{\mathcal{V}}}) \simeq \text{dom}(f)$.

Soit $\mathcal{K} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$. Alors le domaine de $Q_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ est $\mathcal{K}(\text{id}_{I_{\mathcal{V}}})$.

Démonstration. Cela vient du fait que $\ulcorner \text{id}_{I_{\mathcal{V}}} \urcorner$ est le \mathcal{V} -foncteur coreprésentable $\text{hom}_{\mathbf{2}}(0, -)$. \square

Corollaire 16. L'adjonction induit une \mathcal{V} -comonade $Q_{\mathcal{C}} \circ \ker_{\mathcal{C}}$ sur les flèches de \mathcal{C} , et la counité ϵ induit des isomorphismes sur les domaines, en ce qu'elle applique toute flèche f sur un carré

$$\begin{array}{ccc} \text{dom}() & \xrightarrow[\simeq]{\text{dom } \epsilon_f} & \text{dom } f \\ \text{Q}_{\mathcal{C}} \ker_{\mathcal{C}} f \downarrow & & \downarrow f \\ \text{codom}() & \xrightarrow[\text{codom } \epsilon_f]{} & \text{codom } f \end{array} \quad . \quad (8)$$

Appelons \mathcal{C} -morphisme **régulier** un morphisme qui est un \mathcal{C} -quotient, et \mathcal{C} -morphisme **effectif** un qui est l' \mathcal{C} -quotient de son \mathcal{C} -noyau. On obtient ainsi une factorisation de tout morphisme de \mathcal{C} par un \mathcal{C} -morphisme régulier (et même effectif); la question est de savoir si l'on a un système de factorisation orthogonal (et si la notion d' \mathcal{C} -morphisme régulier se compare à une d' \mathcal{C} -morphisme).

On note $\mathfrak{M} = \mathcal{C}^{\perp}$ les flèches de \mathcal{V} orthogonales à droite de celles dans \mathcal{C} . Les flèches objets de \mathfrak{M} seront appelées les \mathfrak{M} -morphisms de \mathcal{V} .

Définition 17 (\mathfrak{M} -morphisme). Un \mathfrak{M} -morphisme de \mathfrak{C} est un morphisme f dans \mathfrak{C} tel que, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, $\text{hom}(C, f)$ est un \mathfrak{M} -morphisme de \mathfrak{V} .

Définition 18 (\mathfrak{E} -congruences). Un \mathfrak{V} -foncteur $\mathcal{K}: \mathfrak{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}$ est une \mathfrak{E} -congruence si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, $\text{hom}(X, \mathcal{K}C)$ est l' \mathfrak{E} -noyau d'une flèche de \mathfrak{V} . Plus précisément on dit que c'est une congruence sur $\mathcal{K}(\text{id}_{\mathfrak{V}})$.

Une congruence est effective si elle est un \mathfrak{E} -noyau (dans \mathfrak{C}).

Notons que, d'après [Dup02, Proposition 3.10], l' \mathfrak{E} -noyau de toute flèche f de \mathfrak{C} est bien une \mathfrak{E} -congruence sur $\text{dom}(f)$.

Proposition 19 ([Dup02, Corollaire 3.15, Proposition 3.21]). Si $(\mathfrak{C}, \mathfrak{M})$ définit un système de factorisation, si $\mathfrak{X} \xrightarrow{i} \mathfrak{C}$ est une sous-catégorie dense contenant $\text{id}_{\mathfrak{V}}$, pour toute \mathfrak{E} -congruence $\mathcal{K}: \mathfrak{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}$ on a $\text{LaxExt}_{i^{\text{op}}}(\mathcal{K}i^{\text{op}}) = \mathcal{K}$ et $\text{Q}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{K}i^{\text{op}}) = \text{Q}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{K})$.

En général, si $(\mathfrak{C}, \mathfrak{M}) = (\perp(\mathfrak{W}^\perp), \mathfrak{W}^\perp)$ est engendré par une classe de flèches \mathfrak{W} , on peut prendre $\mathfrak{X} = \mathfrak{W} \cup \{\text{id}_{\mathfrak{V}}\}$.

Exemple 20. Dans $\mathfrak{V} = \mathfrak{Ens}$, le système de factorisation orthogonal (épis, monos) est engendré par la surjection $2 \rightarrow 1$, donc on peut prendre $\mathfrak{X} = (2 \rightarrow 1, \text{id}_1)$. Ainsi le \mathfrak{X} -noyau d'un morphisme dans une \mathfrak{Ens} -catégorie est donné par sa paire nucléaire, et le \mathfrak{X} -quotient d'une paire parallèle est son coégalisateur.

Exemple 21. Pour $\mathfrak{V} = \mathfrak{Cat}$, un morphisme est un foncteur pleinement fidèle si et seulement si il est orthogonal à droite du foncteur bijectif sur les objets $2 \rightarrow 2$.

2 Classificateurs de morphismes laxes

2.1 2-monades et leurs algèbres

Nous travaillerons toujours dans le contexte *strict*, c'est-à-dire que les 2-catégories seront des \mathfrak{Cat} -catégories et les 2-monades seront des \mathfrak{Cat} -monades (i.e. des monades dans la 2-catégorie des \mathfrak{V} -catégories pour $\mathfrak{V} = \mathfrak{Cat}$).

Cependant l'enrichissement dans \mathfrak{Cat} peut être utilisé pour définir des notions plus laxes d'algèbres sur les 2-monades et de morphismes entre icelles.

Définition 22 (Algèbres laxes). Soient \mathfrak{K} une 2-catégorie et $\mathbb{T} = (\mathcal{T}: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}, \mu: \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}, \eta: \text{id}_{\mathfrak{K}} \rightarrow \mathcal{T})$ une 2-monade sur \mathfrak{K} . Une **algèbre laxe** sur \mathbb{T} est un objet A muni d'une 1-cellule $\alpha: \mathcal{T}A \rightarrow A$ et de deux 2-cellules $\alpha: \alpha \circ \mathcal{T}\alpha \Rightarrow \alpha \circ \mu_A$ et $\alpha_0: \text{id}_A \Rightarrow \alpha \circ \eta_A$, l'ensemble se devant de vérifier des conditions de cohérence.

On dit que (A, α, α) est une **pseudo-algèbre** si α et α_0 sont des isos, et une **algèbre stricte** si elles sont des identités.

Définition 23 (Morphismes laxes d'algèbres). Un **morphisme laxe d'algèbres laxes** $(A, \alpha, \alpha, \alpha_0) \rightarrow$

(B, b, β, β_0) est la donnée d'une 1-cellule $f: A \rightarrow B$ et d'une 2-cellule $\tilde{f}: b \circ \mathcal{T}f \Rightarrow f \circ a$ vérifiant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}^2 B & \xrightarrow{\mathcal{T}b} & \mathcal{T}B \\
 \mathcal{T}^2 f \nearrow & & \searrow \beta \\
 \mathcal{T}^2 A & \xrightarrow{\mu_B} & \mathcal{T}B \\
 \mu_A \searrow & & \nearrow \mathcal{T}f \\
 \mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}^2 B & \xrightarrow{\mathcal{T}b} & \mathcal{T}B \\
 \mathcal{T}^2 f \nearrow & & \searrow \mathcal{T}\tilde{f} \\
 \mathcal{T}^2 A & \xrightarrow{\mathcal{T}a} & \mathcal{T}A \\
 \mu_A \searrow & & \nearrow \alpha \\
 \mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}B & \xrightarrow{b} & B \\
 \mathcal{T}f \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\
 \mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A \\
 \alpha \searrow & & \nearrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}B & \xrightarrow{b} & B \\
 \mathcal{T}f \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\
 \mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A \\
 \alpha \searrow & & \nearrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}
 \quad (9)$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \\
 f \nearrow & & \searrow \eta_B \\
 A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{T}A \\
 \mathcal{T}f \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\
 \mathcal{T}B & \xrightarrow{b} & B \\
 \beta_0 \searrow & & \nearrow f \\
 \mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \\
 f \nearrow & & \searrow \eta_A \\
 A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{T}A \\
 \mathcal{T}f \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\
 \mathcal{T}B & \xrightarrow{b} & B \\
 \alpha_0 \searrow & & \nearrow f \\
 \mathcal{T}A & \xrightarrow{a} & A
 \end{array}
 \quad (10)$$

On dit que (f, \tilde{f}) est un **pseudo-morphisme** si \tilde{f} est un 2-isomorphisme et un **morphisme stricte** si c'est une identité.

Définition 24 (2-catégories d'algèbres). Une transformation $(f, \tilde{f}) \Rightarrow (g, \tilde{g})$ entre deux morphismes laxés est une 2-cellule $\rho: f \Rightarrow g$ vérifiant $\tilde{g} \circ \mathcal{T}\rho = \rho \circ \tilde{f}: b \circ \mathcal{T}f \Rightarrow g \circ a$.

On notera $\mathcal{Lax} - \mathcal{T} - \mathcal{Alg}_l$ la 2-catégorie des \mathcal{T} -algèbres laxés, morphismes laxés et transformations, $\mathcal{T} - \mathcal{Alg}_s$ sa sous-2-catégorie pleine sur les algèbres strictes, $\mathcal{Ps} - \mathcal{T} - \mathcal{Alg}_p$ la sous-2-catégorie 2-pleine sur les pseudo-algèbres et pseudo-morphismes, $\mathcal{T} - \mathcal{Alg}_p$ sa sous-2-catégorie pleine sur les algèbres strictes, et enfin $\mathcal{T} - \mathcal{Alg}_s$ pour la sous-2-catégorie 2-pleine sur les algèbres strictes et morphismes strictes.

Construction 25 (Algèbres libres). De la même façon que pour les monades $\mathcal{C}ns$ -enrichies, le 2-foncteur d'oubli $\mathcal{T} - \mathcal{Alg}_s \rightarrow \mathcal{K}$ admet un 2-adjoint à gauche dont la valeur sur un objet K est $(\mathcal{T}K, \mu_K)$. Les compositions avec les inclusions de $\mathcal{T} - \mathcal{Alg}_s$ dans les autres 2-catégories d'algèbres donnent des 2-adjoints à gauche aux 2-foncteurs d'oubli correspondants.

Exemple 26 (2-catégories libres sur les $\mathcal{C}at$ -graphes, [Wol74],[Shu12]). Soit \mathfrak{V} un cosmos de Bénabou. Un \mathfrak{V} -graphe \mathcal{G} est la donnée d'une classe d'objets $\text{Obj}(\mathcal{G})$ et d'objets $\mathcal{G}(A, B) \in \mathcal{G}$ pour tous $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{G})$. Les objets de morphismes de \mathfrak{V} -graphes sont définis de la manière évidente.

Si le produit monoïdal de \mathfrak{V} préserve les coproduits (est distributif), le \mathfrak{V} -foncteur d'oubli $\mathfrak{V} - \mathcal{C}at \rightarrow \mathfrak{V} - \mathcal{G}rph$ est \mathfrak{V} -monadique. Dans le cas où $\mathfrak{V} = \mathcal{C}at$, on obtient que les 2-catégories sont 2-monadiques sur les $\mathcal{C}at$ -graphes.

Lemme 27 ([Pow11]). Soit \mathcal{T} une monade sur la catégorie sous-jacente d'une 2-catégorie. Alors \mathcal{T} est la monade sous-jacente d'au plus une structure de 2-monade.

Exemple 28 (2-catégories libres sur les computades). Une **computade** \mathfrak{G} est la donnée d'un graphe $|\mathfrak{G}|$ avec, pour tous sommets A, B , un graphe $\mathfrak{G}(A, B)$ dont les fonctions de source et cible sont jointement surjectives et dont l'ensemble des sommets est un sous-ensemble de $\text{hom}_{\mathcal{L}(|\mathfrak{G}|)}(A, B)$ (où $\mathcal{L}(|\mathfrak{G}|)$ dénote la catégorie librement engendrée par le graphe). Les flèches de $\mathfrak{G}(A, B)$ sont appelées les 2-cellules entre deux chaînes de morphismes. Un morphisme de computades est donné par un morphisme des graphes sous-jacents accompagné d'une fonction entre les 2-cellules qui préserve sources et cibles (décomposition en chaîne de morphismes incluse).

À toute 2-catégorie on peut associer sa computade sous-jacente, et le foncteur obtenu admet un (1-)adjoint à gauche, construisant la 2-catégorie libre sur une computade.

2.2 Objets de codescente stricts des données de cohérence

Par simplicité (et puisque c'est le cas qui est pertinent pour l'étude de la construction bar par la 2-monade de 2-catégorie libre), nous allons dans un premier temps détailler le cas du classificateur des morphismes laxes entre algèbres strictes (bien qu'il soit un corollaire du cas général traité en sous-section 2.3).

Construction 29 (Objets de codescente stricts des données de cohérence). On considère la sous- \mathfrak{Cat} -catégorie pleine de $\mathfrak{Cat} - \mathfrak{Fonc}(2, \mathfrak{Cat})$ correspondant à $\mathfrak{W} = (2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3)$, c'est-à-dire $\mathfrak{X} = \langle 1 = 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3 \rangle$. Rappelons que les foncteurs orthogonaux à droite de $2 \rightarrow 2$ sont les foncteurs pleinement fidèles, et que la condition d'orthogonalité à droite de $3 \rightarrow 3$ n'ajoute aucune information. Remarquons également que toute flèche dans \mathfrak{X} est entièrement déterminée par sa flèche $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'$ sous-jacente, donc \mathfrak{X} est équivalente à la catégorie d'indexation simpliciale tronquée Δ_2 . Un diagramme indexé par \mathfrak{X}^{op} dans une 2-catégorie \mathfrak{K} est appelé une **donnée de cohérence reflexive stricte** dans \mathfrak{K} . En notant Δ_2^- la sous-catégorie de Δ_2 obtenue en retirant la flèche $[1] \rightarrow [2]$, une **donnée de cohérence stricte** dans \mathfrak{K} est un 2-foncteur $(\Delta_2^-)^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{K}$.

Le Δ_2^- -conoyau d'une donnée de cohérence stricte est appelé son **objet de codescente strict**. Une vérification directe montrera que le Δ_2^- -conoyau d'une donnée de cohérence stricte réflexive coïncide avec l'objet de codescente de la donnée de cohérence sous-jacente. Puisque les morphismes de \mathfrak{X} sont déterminés par le image sous $\mathcal{E} \nu_1$, le poids (contravariant) calculant les objets de codescente stricts est fourni par le plongement de Yoneda $\mathcal{Y}_{\Delta_2^-} : \Delta_2^- \rightarrow 2 - \mathfrak{Fonc}((\Delta_2^-)^{\text{op}}, \mathfrak{Cat})$, qui se factorise par l'inclusion 2-pleinement fidèle $\mathfrak{Cat} \hookrightarrow 2 - \mathfrak{Fonc}((\Delta_2^-)^{\text{op}}, \mathfrak{Cat})$: en d'autres termes, c'est le 2-foncteur appliquant $[n - 1]$ sur \mathbf{n} (pour $n = 1, 2, 3$).

Étant donné une donnée de cohérence stricte $\mathcal{X} = \left(X_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{c} \\ \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{d} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{p} \\ \xrightarrow{m} \\ \xleftarrow{q} \end{array} X_2 \right)$, nous

allons décrire les cocônes de forme $\mathcal{Y}_{\Delta_2^-}$ sous \mathcal{X} , étant entendu que l'objet de codescente de \mathcal{X} sera le tel cocône initial.

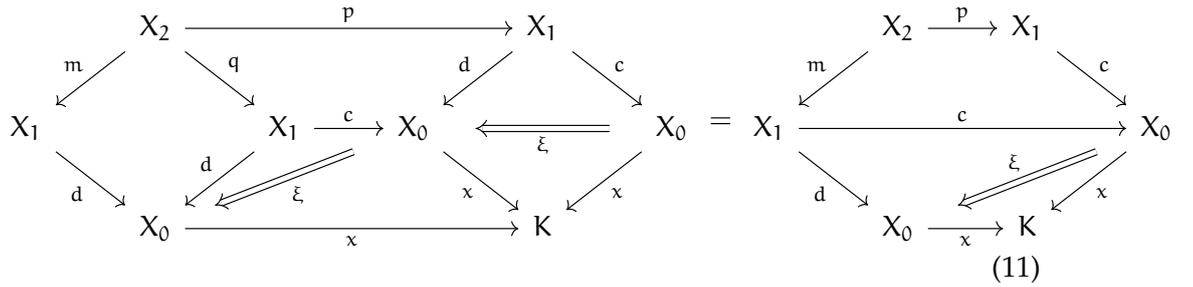
Pour tout objet K , une 2-transformation naturelle $\gamma : \mathcal{Y}_{\Delta_2^-} \Rightarrow \text{hom}_{\mathfrak{K}}(\mathcal{X}, K)$ de 2-foncteurs $\Delta_2^- \rightarrow \mathfrak{Cat}$ consiste en

- une 1-cellule $x := \gamma_{[0]}(0) : X_0 \rightarrow K$,

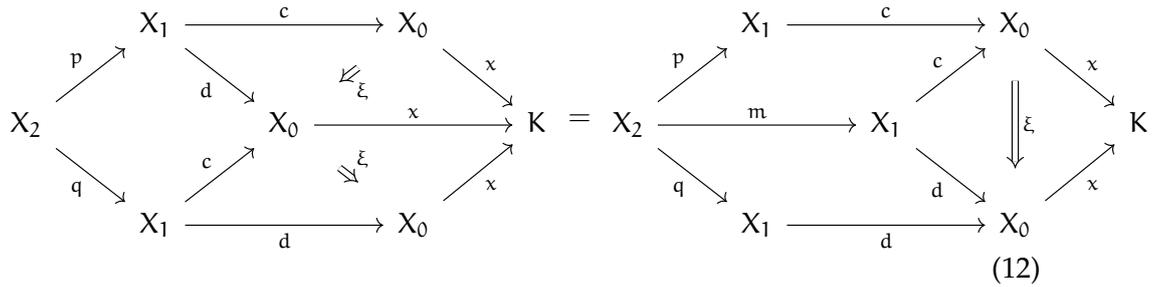
- deux 1-cellules $x_0 = \gamma_{[1]}(0), x_1 = \gamma_{[1]}(1): X_1 \rightarrow K$ avec une 2-cellule $\xi := \gamma_{[1]}(0 < 1): x_0 \Rightarrow x_1$,
- trois 1-cellules $x'_0 = \gamma_{[2]}(0), x'_1 = \gamma_{[2]}(1), x'_2 = \gamma_{[2]}(2): X_2 \rightarrow K$ avec trois 2-cellules $\xi_0 = \gamma_{[2]}(0 < 1): x'_0 \Rightarrow x'_1$, $\xi_2 = \gamma_{[2]}(1 < 2): x'_1 \Rightarrow x'_2$ et $\xi_1 = \gamma_{[2]}(0 < 2) = \xi_2 \circ \xi_0: x'_0 \Rightarrow x'_2$

vérifiant les conditions de naturalité

- $x_0 = xc, x_1 = xd, x'_0 = xcp = xcm, x'_1 = xcq = xdp, x'_2 = xdq = xdm$, et $\xi_0 = \xi p$, $\xi_1 = \xi m$ et $\xi_2 = \xi q$
- $\xi e = id_x$
-



ou bien de façon plus symétrique, en accolant la cellule $dm = dq$ inverse de l'identité $dq = dm$



Remarque 30. Le Δ_2^- -noyau d'une flèche $A \xrightarrow{f} B$, appelé son **noyau supérieur**, consiste en le diagramme

$$A \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{\quad} \\ \longleftarrow \end{array} f \downarrow f \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{\quad} \\ \longleftarrow \end{array} f \downarrow f \downarrow f \quad (13)$$

où $f \downarrow f$ est l'objet « comma » de la correspondance $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{f} A$ et $f \downarrow f \downarrow f = f \downarrow f \times_A f \downarrow f$.

Dans $\mathcal{C}at$, l'objet de codescente du noyau supérieur d'un foncteur donne sa factorisation en bijectif sur les objets suivi de pleinement fidèle.

Théorème 31 ([Lac02]). *Si $\mathcal{T} - \mathcal{A}lg_s$ admet les objets de codescente stricts de données de cohérence strictes, l'inclusion $\mathcal{T} - \mathcal{A}lg_s \hookrightarrow \mathcal{T} - \mathcal{A}lg_1$ admet un 2-adjoint à gauche.*

Démonstration. Pour $(f, \tilde{f}): (A, a) \rightarrow (B, b)$ un morphisme laxé donné, la flèche sous-jacente $f: A \rightarrow B$ correspond par adjonction à un morphisme strict $\varphi = b \circ \mathcal{T}f: (\mathcal{T}A, \mu_A) \rightarrow$

(B, b) , tandis que la 2-cellule $\tilde{f}: b \circ \mathcal{T}f \Rightarrow f \circ a$ donne $\tilde{\varphi} = b\mathcal{T}\tilde{f}: b \circ \mathcal{T}b \circ \mathcal{T}^2f \Rightarrow b \circ \mathcal{T}f \circ \mathcal{T}a$. Remarquons que

$$b \circ \mathcal{T}b \circ \mathcal{T}^2f = b \circ \mu_B \circ \mathcal{T}^2f = b \circ \mathcal{T}f \circ \mu_A = \varphi \circ \mu_A \quad (14)$$

et $b \circ \mathcal{T}f \circ \mathcal{T}a = \varphi \circ \mathcal{T}a$, ce qui signifie que $\tilde{\varphi}$ est une 2-cellule $\varphi \circ \mu_A \Rightarrow \varphi \circ \mathcal{T}a$.

Les équations faisant de (f, \tilde{f}) un morphisme laxse se traduisent en des équations sur φ et $\tilde{\varphi}$, qui sont précisément les équations pour que $(\varphi, \tilde{\varphi})$ définisse un cocône de codescente de sommet (B, b) dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s$ pour la donnée de cohérence stricte réflexive

$$\text{Res}(A, a) := (\mathcal{T}A, \mu_A) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mu_A} \\ \xrightarrow{\mathcal{T}\eta_A} \\ \xleftarrow{\mathcal{T}a} \end{array} (\mathcal{T}^2A, \mu_{\mathcal{T}A}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mu_{\mathcal{T}A}} \\ \xrightarrow{\mathcal{T}\eta_{\mathcal{T}A}} \\ \xleftarrow{\mathcal{T}^2a} \end{array} (\mathcal{T}^3A, \mu_{\mathcal{T}^2A}) . \quad (15)$$

L'on peut remarquer que cette donnée de cohérence est obtenue en appliquant à (A, a) la résolution bar de \mathcal{T} vue comme une algèbre dans la 3-catégorie $2 - \mathfrak{Cat}$.

Ainsi construire un représentant pour le problème des morphismes laxses provenant de (A, a) revient à construire dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s$ un représentant pour les cocônes de codescente stricts sous $\text{Res}(A)$, c'est-à-dire un objet de codescente strict. \square

Remarque 32. On obtient de la même façon un classificateur de pseudo-morphismes en remplaçant l'objet de codescente strict par un iso-objet de codescente strict.

Remarque 33 ([Bou10, Remark 6.9]). La construction de l'adjoint à gauche repose sur le fait que la définition des morphismes laxses correspond exactement à celle des objets de codescente. Il est en fait possible d'exhiber $\text{hom}_{\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_1}((A, a), (B, b))$ comme un objet de descente de la co-donnée de cohérence

$$\text{hom}_{\mathfrak{R}}(A, B) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{hom}(\mathcal{T}A, b) \circ \mathcal{T}} \\ \xleftarrow{\text{hom}(\eta_A, B)} \\ \xrightarrow{\text{hom}(a, B)} \end{array} \text{hom}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}A, B) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{hom}(\mathcal{T}^2A, b) \circ \mathcal{T}} \\ \xleftarrow{\text{hom}(\mu_A, B)} \\ \xrightarrow{\text{hom}(\mathcal{T}a, B)} \end{array} \text{hom}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}^2A, B) . \quad (16)$$

Lemme 34 ([Lac02, Proposition 2.1]). *Les objets de codescente de données de cohérence peuvent être construits à partir de coinséateurs et de coéquifieurs.*

Corollaire 35. *Les classificateurs de morphismes laxses existent dès que \mathfrak{R} est 2-cocomplète et \mathcal{T} une monade finitaire (ou avec rang), i.e. qui préserve les limites κ -filtrées pour κ un certain cardinal régulier.*

Construction 36. Notons $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s \overset{(-)'}{\underset{\dot{\iota}}{\rightleftarrows}} \mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_p$ l'adjonction du classificateur de pseudo-morphismes. Son unité est le pseudomorphisme universel $\lambda_A: (A, a) \rightarrow (A, a)'$, tandis que la counité $p_A: (A, a)' \rightarrow (A, a)$ en donne une rétraction qui est un morphisme strict : par l'identité triangulaire de l'adjonction, $p_A\lambda_A = \text{id}_{A, a}$ dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}$.

Par [Bou10, Proposition 6.12], le morphisme (strict) p_A est une équivalence surjective dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_p$, de quasi-inverse λ_A .

Proposition 37 ([Bou10, Proposition 6.15]). Soit (A, α) une \mathbb{T} -algèbre stricte. Sont équivalents :

- le morphisme strict p_A admet une section dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s$,
- p_A est une équivalence surjective dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s$,
- (A, α) est un rétract d'un classificateur de pseudomorphismes $(B, b)'$ dans $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s$.

Définition 38 (algèbre flexible). Une \mathbb{T} -algèbre (stricte) vérifiant les conditions équivalentes de la 37 est dite **flexible**.

Proposition 39 ([Bou10, Proposition 6.16]). Tout pseudomorphisme d'une algèbre flexible vers une algèbre (stricte) est isomorphe à un morphisme strict.

Définition 40 ((co)limites flexibles). Une (co)limite pondérée par un \mathfrak{Cat} -préfaisceau est dite flexible si elle peut être construite à partir de (co)produits, (co)inséurs, (co)équifieurs (les (co)limites « PIE »), et de scindages des idempotents.

Proposition 41 ([Bou10]). La sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{T} - \mathfrak{Alg}_s$ sur les algèbres flexibles est la clôture des algèbres libres par colimites flexibles.

2.3 Objets de codescente laxes

3 Vers une interprétation homotopique

3.1 2-catégories de modèles strictes

On considère la catégorie \mathfrak{Cat} munie de la structure de modèle canonique (l'unique pour laquelle les équivalences faibles sont les équivalences de catégories), qui interagit avec la structure monoïdale cartésienne pour en faire une catégorie de modèle monoïdale symétrique.

Définition 42. Une 2-catégorie de modèle stricte est une \mathfrak{Cat} -catégorie de modèle.

Exemple 43 ([Lac07]). Sur toute 2-catégorie bicomplète on a la 2-structure de modèle triviale, dont les équivalences faibles sont les équivalences et dont les fibrations sont les isofibrations (les morphismes dont les images par tout 2-foncteur représentable sont des isofibrations de hom-catégories).

Définition 44 (2-catégorie de pseudo-homotopie). Pour toutes 2-catégories $\mathfrak{K}, \mathfrak{M}$, notons $\mathfrak{Fon}^{\text{Ps}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ la 2-catégorie des foncteurs de \mathfrak{M} vers \mathfrak{K} , transformations pseudo-naturelles entre eux, et modifications entre elles.

Si \mathfrak{M} est une 2-catégorie de modèle, sa 2-catégorie de pseudo-homotopie est définie par la même propriété universelle que la catégorie d'homotopie d'une catégorie de modèle, en utilisant les 2-catégories $\mathfrak{Fon}^{\text{Ps}}$ à la place des catégories \mathfrak{Fonc} .

Proposition 45 ([Lac07]). Soit $\mathfrak{M} \xrightleftharpoons{\mathcal{U}} \mathfrak{A}$ une 2-adjonction, où \mathfrak{M} est munie d'une 2-structure de modèle. Alors on définit une 2-structure de modèle, dite **transférée**, sur \mathfrak{A} en décrétant que les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les 1-cellules dont l'image par \mathcal{U} est une équivalence faible (resp. une fibration) dans \mathfrak{M} .

3.2 Catégorie d'homotopie des algèbres strictes

Lemme 46 ([Lac07, Propositions 5.10, 5.11]). *Pour T une 2-monade sur une 2-catégorie de modèle \mathfrak{K} , considérons la 2-adjonction $\mathfrak{M} \rightleftarrows T - \mathfrak{Alg}_s$, et munissons \mathfrak{K} de la 2-structure de modèle triviale. Une 1-cellule de $T - \mathfrak{Alg}_s$ est une équivalence faible pour la structure de modèle transférée si et seulement si elle admet un quasi-inverse dans $T - \mathfrak{Alg}_p$. Il en va de même pour les (iso)fibrations.*

Théorème 47 ([Lac07, Theorem 5.15]). *Soient \mathfrak{K} une 2-catégorie et T une 2-monade sur \mathfrak{K} . Considérons \mathfrak{K} munie de la 2-structure de modèle triviale, et $T - \mathfrak{Alg}_s$ munie de la 2-structure de modèle transférée. La 2-catégorie de pseudo-homotopie de $T - \mathfrak{Alg}_s$ est $T - \mathfrak{Alg}_p$.*

Proposition 48 ([Lac07, Theorem 5.12]). *Les objets cofibrants de $T - \mathfrak{Alg}_s$ sont les algèbres flexibles.*

Exemple 49. Le 2-foncteur d'oubli $\text{Obj}(\mathfrak{K}) \rightarrow \mathfrak{K}$ (où $\text{Obj}(\mathfrak{K})$ désigne la catégorie discrète d'ensemble d'objets celui de \mathfrak{K}) induit un 2-foncteur $2 - \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{K}, \mathcal{CA}) \rightarrow 2 - \mathfrak{Fonc}(\text{Obj}(\mathfrak{K}), \mathcal{CA})$. Par le théorème de Beck, on peut vérifier que ce 2-foncteur est monadique, et permet ainsi d'exhiber $2 - \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{K}, \mathcal{CA})$ comme la 2-catégorie d'algèbres sur une 2-monade.

Une (co)limite flexible est exactement une (co)-limite pondérée par un poids qui est une algèbre flexible sur la 2-monade susmentionnée.

Dans une catégorie de modèle, il est connu que les objets cofibrants sont stables par coproduits et rétracts (scindage des idempotents).

Proposition 50 ([Lac07, Theorem 6.4]). *Dans une 2-catégorie de modèle, les objets cofibrants sont stables par colimites flexibles.*

3.3 Morphismes faibles pour les systèmes de factorisation faibles algébriques

Définition 51 (SFAF). *Rappelons qu'un système de factorisation faible algébrique sur une catégorie \mathfrak{M} est une factorisation fonctorielle $(\mathcal{Q}, \mathcal{R}) : \mathfrak{Fonc}(\mathbf{2}, \mathfrak{M}) \rightarrow \mathfrak{Fonc}(\mathbf{3}, \mathfrak{M})$ muni d'une structure de comonade \mathcal{Q} sur (\mathcal{Q}, ϵ) et d'une structure de monade \mathcal{R} sur (\mathcal{R}, η) tel que les morphismes définissent une loi distributive de \mathcal{Q} sur \mathcal{R} .*

On note \mathcal{SFAF} la 2-catégorie des SFAF et morphismes laxes entre eux, et $\mathcal{SFAF}(\mathfrak{M})$ la 2-catégorie des systèmes de factorisations algébriques faibles sur \mathfrak{M} .

Lemme 52 (AWFS1, §2.4). *Les (flèches sous-jacentes de) \mathcal{Q} -algèbres sont faiblement orthogonales à gauches des \mathcal{R} -algèbres.*

Construction 53. Il existe une catégorie double $\mathbf{R} - \mathbf{Alg}$ dont les objets sont ceux de \mathfrak{M} , les morphismes verticaux les flèches de \mathfrak{M} , et les morphismes horizontaux et cellules les \mathcal{R} -algèbres et morphismes d'icelles : la flèche identique de chaque objet admet une unique structure de \mathcal{R} -algèbre, et les structures d'algèbres de deux flèches composables s'étendent de façon univoque à une structure d'algèbre sur la composée. Elle est naturellement munie d'un foncteur double d'oubli $\mathbf{R} - \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Quint}(\mathfrak{M})$ vers \mathfrak{M} vue comme

sa catégorie double de quintets (ou carrés commutatifs), qui correspond à la catégorie interne $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{Fonc}(\mathbf{2}, \mathfrak{M})$.

On appellera catégorie double concrète sur \mathfrak{M} une catégorie double munie d'un tel foncteur vers $\mathbf{Quint}(\mathfrak{M})$.

Théorème 54 ([BG15, Theorem 3]). *Le 2-foncteur $(-) - \mathbf{Alg}: \mathfrak{SFAF} \rightarrow \mathfrak{Fonc}(\mathbf{2}, \mathbf{Dbl})$ est 2-pleinement fidèle, présentant \mathfrak{SFAF} comme une sous-catégorie pleine des catégories doubles concrètes.*

Remarque 55. L'une des conditions détectant les catégories doubles concrètes qui définissent des SFAF est que la composante morphismes du foncteur double structural (dont la cible est donc $\mathbf{Quint}(\mathfrak{M})_1 = \mathfrak{Fonc}(\mathbf{2}, \mathfrak{M})$) soit monadique, et on retrouve ainsi \mathbf{R} comme la monade de l'adjonction.

Exemple 56 (AWFS1, §4.1 et 4.2). La catégorie double $\mathbf{ScindEpi}(\mathfrak{M})$ dont les morphismes horizontaux sont les épis scindés (*i.e.* munis d'une section), avec son foncteur double d'oubli évident, définit si \mathfrak{M} admet les coproduits finis un SFAF, que l'on considère comme le SFAF **trivial à gauche**. La monade correspondante est donnée par $\mathcal{R}(A \xrightarrow{f} B) = A \amalg B \xrightarrow{(f, \text{id}_B)} B$.

Si \mathfrak{M} est une 2-catégorie avec suffisamment de colimites, il en est de même de la sous-catégorie double $\mathbf{Lali}(\mathfrak{M})$ sur les inverses à gauche adjoints à gauche (les épis scindés qui ont la propriété d'admettre un adjoint à droite, avec la flèche identique pour counité).

Définition 57. *La comonade \mathbf{Q} induit des comonades sur toutes les catégories tranches de \mathfrak{M} . En particulier, si \mathfrak{M} admet un objet initial \emptyset , la comonade induite sur $\mathfrak{M}^{\emptyset/} \simeq \mathfrak{M}$ est appelée la comonade de **remplacement cofibrant**. Sa catégorie de co-Kleisli est appelée la **catégorie de morphismes faibles à gauche du SFAF**, et notée $\mathfrak{Fbl}_g(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$.*

Théorème 58 ([BG15, Theorem 10]). *On a une équivalence de catégories*

$$\text{hom}_{\mathfrak{Cat}}(\mathfrak{Fbl}_g(\mathbf{Q}, \mathbf{R}), \mathfrak{D}) \simeq \text{hom}_{\mathbf{Dbl}}(\mathbf{R} - \mathbf{Alg}, \mathbf{ScindEpi}(\mathfrak{M})) \quad (17)$$

naturelle en la catégorie \mathfrak{D} .

On peut donc voir la catégorie des morphismes faibles comme la catégorie obtenue en rajoutant librement une section aux \mathbf{R} -algèbres. En particulier, même lorsque \mathfrak{M} n'admet pas d'objet initial, on peut définir la catégorie de morphismes faibles par cette propriété universelle.

Remarque 59 ([BG15, Theorem 11]). La catégorie de morphismes faibles admet aussi une présentation en terme de zigzags.

Construction 60 ([BG15, §3.3]). L'épi scindé universel est la catégorie

$$\mathfrak{ES} = \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{m} & 0 \\ & \searrow \text{id}_1 & \downarrow e \\ & & 1 & \xrightarrow{m} & 0 \end{array} \quad . \quad (18)$$

Le foncteur monadique définissant $\text{ScindEp}(\mathfrak{M})$ est alors la restriction $\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{S}\mathfrak{E}, \mathfrak{M}) \rightarrow (2, \mathfrak{M})$, c'est-à-dire que $\text{ScindEp}(\mathfrak{M})$ est donné par la catégorie interne

$$\mathfrak{M} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\rightleftharpoons}} \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{S}\mathfrak{E}, \mathfrak{M}) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\rightleftharpoons}} \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{S}\mathfrak{E}, \mathfrak{M}) \times_{\mathfrak{M}} \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{S}\mathfrak{E}, \mathfrak{M}). \quad (19)$$

Cette donnée de cohérence est l'image par $\mathfrak{Fonc}(-, \mathfrak{M})$ du diagramme

$$\mathcal{S} = \left(1 \overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\rightleftharpoons}} \mathfrak{S}\mathfrak{E} \overset{\longleftarrow}{\underset{\longrightarrow}{\rightleftharpoons}} \mathfrak{S}\mathfrak{E} \amalg_1 \mathfrak{S}\mathfrak{E} \right), \quad (20)$$

et donc par adjonction $\text{hom}_{\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{L}}(\mathbb{R} - \text{Alg}, \text{ScindEpi}(-))$ est coreprésenté par la colimite du diagramme de forme Δ_2^- définissant $\mathbb{R} - \text{Alg}$ pondérée par \mathcal{S} . Mais la propriété que $\mathbb{R} - \text{Alg}$ respecte pour être un SFAF fait qu'elle voit \mathcal{S} comme le poids pour les objets de codescente, et il apparaît finalement que la catégorie de morphismes faibles pour tout SFAF (\mathbb{Q}, \mathbb{R}) est obtenue comme l'objet de codescente de $\mathbb{R} - \text{Alg}$.

Lemme 61 (Relèvements projectifs, WAFS1 Propositions 13, 14). *La description des SFAF comme catégories doubles concrètes permet de définir (par tiré en arrière) des SFAF accessibles transférés le long d'une adjonction accessible (donc en particulier sur une monade accessible) sur une catégorie présentable.*

Théorème 62 ([BG15, Theorem 17]). *Soit \mathbb{T} une 2-monade accessible sur une 2-catégorie 2-bicomplète \mathfrak{M} . Alors la catégorie de morphismes faibles pour le SFAF des lalis sur \mathfrak{M} transféré sur $\mathbb{T} - \text{Alg}_s$ est $\mathbb{T} - \text{Alg}_f$.*

On retrouve de même $\mathbb{T} - \text{Alg}_p$ en partant du SFAF pour les équivalences de rétractions (les lalis dont l'unité est inversible).

Références

- [Bet97] Renato Betti, *Adjointness in descent theory*
- [Bou10] John Bourke, *Codescent objects in 2-dimensional universal algebra*
- [BG15] John Bourke et Richard Garner, *Algebraic weak factorisation systems II : Categories of weak maps*
- [Dup02] Mathieu Dupont, *Catégories enrichies dans une base munie d'un système de factorisation*
- [Lac02] Stephen Lack, *Codescent objects and coherence*
- [Lac07] Stephen Lack, *Homotopy-theoretic aspects of 2-monads*
- [Pow11] John Power, *Unicity of Enrichment over \mathfrak{Cat} or \mathfrak{Spd}*
- [RS08] Emily Riehl et Michael Shulman, *Weighted limits and colimits*
- [Shu12] Mike Shulman, *Not every pseudoalgebra is equivalent to a strict one*
- [Str76] Ross Street, *Limits indexed by category-valued 2-functors*
- [Str03] Ross Street, *Categorical and combinatorial aspects of descent theory*
- [Wol74] Harvey Wolff, *\mathfrak{W} -cat and \mathfrak{W} -graph*