Vecteurs de Witt et correspondance de basculement pour les anneaux perfectoïdes entiers

— GdT Cohomolgie prismatique —

David Kern

Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques

9 mai 2019

Plan

Sommaire - Section 1 : Propriétés arithmétiques des vecteurs de Witt

1. Propriétés arithmétiques des vecteurs de Witt
   - Λ-anneaux
   - Vecteurs de Witt
2. Basculement des anneaux perfectoïdes

Pré-λ-anneaux

Définition

- Un pré-λ-anneau est un anneau A muni d'endomorphismes d'ensembles $\lambda^i\colon A \to A$ pour $i \geq 0$ tels que $\lambda^0(a) = 1$ pour tout a.
- Un morphisme $(A, \lambda^i_A) \to (B, \lambda^i_B)$ est $f\colon A \to B$ commutant avec λ^i : $f\lambda^i_A = \lambda^i_B f$.

Pré-λ-anneaux

Définition

- Un pré-λ-anneau est un anneau A muni d'endomorphismes d'ensembles $\lambda^i\colon A \to A$ pour $i \geq 0$ tels que $\lambda^0(a) = 1$ pour tout a.
- Un morphisme $(A, \lambda^i_A) \to (B, \lambda^i_B)$ est $f\colon A \to B$ commutant avec λ^i : $f\lambda^i_A = \lambda^i_B f$.

Séries formelles à terme constant unitaire

$\Lambda(A) = 1 + tA[\![t]\!] = \left\{P(t) = \sum_{i\geq 0} a_i t^i \mid a_i \in A, a_0 = 1\right\}$, groupe abélien par $\times$.

Pré-λ-anneaux

Définition

- Un pré-λ-anneau est un anneau A muni d'endomorphismes d'ensembles $\lambda^i \colon A \to A$ pour $i \geq 0$ tels que $\lambda^0(a) = 1$ pour tout a.
- Un morphisme $(A, \lambda^i_A) \to (B, \lambda^i_B)$ est $f \colon A \to B$ commutant avec λ^i : $f\lambda^i_A = \lambda^i_B f$.

Séries formelles à terme constant unitaire

$\Lambda(A) = 1 + tA[\![t]\!] = \left\{ P(t) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i \mid a_i \in A, a_0 = 1 \right\}$, groupe abélien par $\times$.

Si on interprète les a_i comme les fonctions symétriques $a_i = \sum_{j_1 \leq \cdots \leq j_i} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_i}$ en des variables ξ_j, on a l'expansion en série $P(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - t\xi_i)^{-1}$. $\rightsquigarrow$ Produit

Pré-λ-anneaux

Définition

- Un pré-λ-anneau est un anneau A muni d'endomorphismes d'ensembles $\lambda^i \colon A \to A$ pour $i \geq 0$ tels que $\lambda^0(a) = 1$ pour tout a.
- Un morphisme $(A, \lambda_A^i) \to (B, \lambda_B^i)$ est $f \colon A \to B$ commutant avec λ^i : $f\lambda_A^i = \lambda_B^i f$.

Séries formelles à terme constant unitaire

$\Lambda(A) = 1 + tA[\![t]\!] = \left\{ P(t) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i \mid a_i \in A, a_0 = 1 \right\}$, groupe abélien par $\times$.

Si on interprète les a_i comme les fonctions symétriques $a_i = \sum\limits_{j_1 \leq \cdots \leq j_i} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_i}$ en des variables ξ_j, on a l'expansion en série $P(t) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} (1 - t\xi_i)^{-1}$. $\rightsquigarrow$ Produit

Alors $\lambda^n(P(t)) \coloneqq \prod\limits_{i_1 < \cdots < i_n} \dfrac{1}{1 - t\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n}}$.

Λ-anneaux

Si (A, λ^i) est un pré-Λ-anneau, on pose $\lambda_t(a) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i(a) t^i \in 1 + tA[\![t]\!] \subset A[\![t]\!]$.

La catégorie des Λ-anneaux est la sous-catégorie pleine des pré-Λ-anneaux (A, λ^i) tels que $\lambda^1 = \mathrm{id}$ et que $A \to \Lambda(A), a \mapsto \lambda_{-t}(a)^{-1}$ soit un morphisme de pré-Λ-anneaux.

Λ-anneaux

Si (A, λ^i) est un pré-Λ-anneau, on pose $\lambda_t(a) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i(a) t^i \in 1 + tA[\![t]\!] \subset A[\![t]\!]$.

La catégorie des Λ-anneaux est la sous-catégorie pleine des pré-Λ-anneaux (A, λ^i) tels que $\lambda^1 = \mathrm{id}$ et que $A \to \Lambda(A), a \mapsto \lambda_{-t}(a)^{-1}$ soit un morphisme de pré-Λ-anneaux.

Description explicite

Il existe des polynômes symétriques universels P_n et $P_{n,m}$ tels que

- $\lambda^0 = 1$ et $\lambda^1 = \mathrm{id}$, et $\lambda^n(1) = 0$ pour $n > 1$,
- $\lambda^n(r+s) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k(r)\lambda^n(s)$,
- $\lambda^n(r \cdot s) = P_n(\lambda^1(r), \ldots, \lambda^n(r), \lambda^1(s), \cdots, \lambda_n(s))$,
- $\lambda^m \circ \lambda^n(r) = P_{m,n}(\lambda^1(r), \cdots, \lambda^{mn}(r))$.

Exemples

- $\Lambda(A)$ est bien un Λ-anneau pour tout anneau A

Exemples

- $\Lambda(A)$ est bien un Λ-anneau pour tout anneau A
- Si $(\mathfrak{A}, \otimes)$ est une catégorie abélienne monoïdale, le groupe de Grothendieck

  $$K_0(\mathfrak{A}) = \mathbb{Z}[\mathrm{Obj}(\mathfrak{A})] / \left([F] = [F'] + [F''] \iff \exists\, 0 \to F' \rightarrowtail F \twoheadrightarrow F'' \to 0\right)$$

  est un anneau, commutatif si $(\mathfrak{A}, \otimes)$ est tressée. Si le tressage est une structure symétrique, alors $K_0(\mathfrak{A})$ est un Λ-anneau avec $\lambda^m([F]) = [\bigwedge^m F]$

Exemples

- $\Lambda(A)$ est bien un Λ-anneau pour tout anneau A
- Si $(\mathfrak{A}, \otimes)$ est une catégorie abélienne monoïdale, le groupe de Grothendieck
$$K_0(\mathfrak{A}) = \mathbb{Z}[\mathrm{Obj}(\mathfrak{A})]/\left([F] = [F'] + [F''] \iff \exists\, 0 \to F' \rightarrowtail F \twoheadrightarrow F'' \to 0\right)$$
est un anneau, commutatif si $(\mathfrak{A}, \otimes)$ est tressée. Si le tressage est une structure symétrique, alors $K_0(\mathfrak{A})$ est un Λ-anneau avec $\lambda^m([F]) = [\bigwedge^m F]$
- L'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \dots] = \varprojlim_n \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_n]^{\mathbb{S}_n}$, avec $\lambda^n(\xi_1) = \xi_n$, est le λ-anneau librement engendré par un élément ξ_1.

Exemples

- $\Lambda(A)$ est bien un Λ-anneau pour tout anneau A
- Si $(\mathfrak{A}, \otimes)$ est une catégorie abélienne monoïdale, le groupe de Grothendieck

$$K_0(\mathfrak{A}) = \mathbb{Z}[\mathrm{Obj}(\mathfrak{A})]/\left([F] = [F'] + [F''] \iff \exists\, 0 \to F' \rightarrowtail F \twoheadrightarrow F'' \to 0\right)$$

  est un anneau, commutatif si $(\mathfrak{A}, \otimes)$ est tressée. Si le tressage est une structure symétrique, alors $K_0(\mathfrak{A})$ est un Λ-anneau avec $\lambda^m([F]) = [\bigwedge^m F]$
- L'anneau des fonctions symétriques $\mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \dots] = \varprojlim_n \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_n]^{\mathbb{S}_n}$, avec $\lambda^n(\xi_1) = \xi_n$, est le λ-anneau librement engendré par un élément ξ_1.
- $\mathbb{Z}$ admet une unique structure de λ-anneau $\lambda^i(n) = \binom{n}{i}$ (*i.e.* $\lambda_t(n) = (1+t)^n$). En outre, tout λ-anneau est de caractéristique 0 et contient $\mathbb{Z}$ comme sous-λ-anneau.

Relèvements du Frobenius

Soit p un nombre premier, fixé pour toujours.

Relèvements du Frobenius

Soit p un nombre premier, fixé pour toujours.

Un Λ-anneau p-typique est un anneau A muni d'un endomorphisme $F_p \colon A \longrightarrow A$ relevant le Frobenius modulo p : $F_p(a) \equiv a^p \mod (p)$.

Relèvements du Frobenius

Soit p un nombre premier, fixé pour toujours.

Un Λ-anneau p-typique est un anneau A muni d'un endomorphisme $F_p \colon A \to A$ relevant le Frobenius modulo p : $F_p(a) \equiv a^p \mod (p)$.

Proposition

Un anneau A sans torsion est muni d'une structure de Λ-anneau si et seulement si il est muni d'une structure de Λ-anneau q-typique pour tout nombre premier q, les relèvements de Frobenius commutant entre eux.

Relèvements du Frobenius

Soit p un nombre premier, fixé pour toujours.

Un Λ-anneau p-typique est un anneau A muni d'un endomorphisme $F_p \colon A \to A$ relevant le Frobenius modulo p : $F_p(a) \equiv a^p \mod (p)$.

Proposition

Un anneau A sans torsion est muni d'une structure de Λ-anneau si et seulement si il est muni d'une structure de Λ-anneau q-typique pour tout nombre premier q, les relèvements de Frobenius commutant entre eux.

Dans $K(\mathfrak{A})$, le Frobenius est donné par les opérations d'Adams

De façon générale, les Frobenius F_q d'un λ-anneau sont donnés par $\sum_{n\geq 1} F_n(a)t^n = -t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\lambda_{-t}(a))$.

Construction

Remarque : Nous allons construire un adjoint à droite au foncteur d'oubli $\lambda\text{—}\mathfrak{Ann} \to \mathfrak{Ann}$. Pour les applications arithmétiques, il est utile de considérer une construction plus générale.

Définition

$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ est **stable par diviseurs** si $\forall n \in S$, tous les diviseurs propres de n sont dans S.

Construction

Remarque : Nous allons construire un adjoint à droite au foncteur d'oubli λ–$\mathfrak{Ann} \to \mathfrak{Ann}$. Pour les applications arithmétiques, il est utile de considérer une construction plus générale.

Définition

$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ est **stable par diviseurs** si $\forall n \in S$, tous les diviseurs propres de n sont dans S.

- Soit A un anneau. Pour tout S stable par diviseurs, on écrit $W_S(A) = A^S$.
- Aussi $W(A)$ pour $S = \mathbb{N}$ et $W_p(A)$ pour $S = \{1, p, p^2, \ldots\}$

Construction

Remarque : Nous allons construire un adjoint à droite au foncteur d'oubli $\lambda\text{—}\mathfrak{Ann} \to \mathfrak{Ann}$. Pour les applications arithmétiques, il est utile de considérer une construction plus générale.

Définition

$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ est **stable par diviseurs** si $\forall n \in S$, tous les diviseurs propres de n sont dans S.

- Soit A un anneau. Pour tout S stable par diviseurs, on écrit $W_S(A) = A^S$.
- Aussi $W(A)$ pour $S = \mathbb{N}$ et $W_p(A)$ pour $S = \{1, p, p^2, \ldots\}$

La n–ième application fantôme est

$$\mathscr{Q}_n \colon W_S(A) \to A, (a_\ell)_{\ell \in S} \mapsto \sum_{d|n} d \cdot a_d^{\frac{n}{d}}.$$

Anneaux de vecteurs de Witt

Lemme

Il existe une unique structure d'anneau sur $W_S(A)$ telle que l'application fantôme $\ghost = (\ghost_n)_{n \in S} \colon W_S(A) \to A^S$ soit un morphisme d'anneaux (naturel en A).

On appelle l'anneau $W_S(A)$ ainsi construit l'anneau des S-vecteurs de Witt sur A. Si $S = \mathbb{N}$, on parle d'anneau des **grands vecteurs de Witt**, et si $S = (1, p, p^2, \dots)$, $W_p(A)$ est l'anneau des **vecteurs de Witt** ***p*-typiques**.

Remarque 1 : On détermine en fait un foncteur $W_S \colon \mathfrak{Ann} \to \mathfrak{Ann}$.

Anneaux de vecteurs de Witt

Lemme

Il existe une unique structure d'anneau sur $W_S(A)$ telle que l'application fantôme $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_n)_{n\in S} \colon W_S(A) \to A^S$ soit un morphisme d'anneaux (naturel en A).

On appelle l'anneau $W_S(A)$ ainsi construit l'anneau des S-vecteurs de Witt sur A. Si $S = \mathbb{N}$, on parle d'anneau des **grands vecteurs de Witt**, et si $S = (1, p, p^2, \dots)$, $W_p(A)$ est l'anneau des **vecteurs de Witt p-typiques**.

Remarque 1 : On détermine en fait un foncteur $W_S \colon \mathfrak{Ann} \to \mathfrak{Ann}$.

Remarque 2 : On considère souvent les troncations $W_S^{<n}(A) = W_{\{\ell\in S|\ell<n\}}$ de longueur $\#\{\ell \in S \mid \ell < n\}$, avec $W_S(A) = \varprojlim_{n\in S} W_S^{<n}(A)$.

On a un isomorphisme d'anneaux $W(A) \simeq \Lambda(A) = 1 + tA[\![t]\!]$

Cas p-typique des anneaux parfaits

$W_p(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$ est l'anneau des nombres p-adiques.

Soit A une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite. Alors W_p est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre libre sans p-torsion complète pour la topologie p-adique, et $W_p(A)/(p^r) = W_p^{<p^r}(A)$: en particulier $W_p(A)/(p) = A$.

Cas p-typique des anneaux parfaits

$W_p(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$ est l'anneau des nombres p-adiques.

Soit A une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite. Alors W_p est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre libre sans p-torsion complète pour la topologie p-adique, et $W_p(A)/(p^r) = W_p^{<p^r}(A)$: en particulier $W_p(A)/(p) = A$.

Relèvement de Teichmüller

Pour un anneau A quelconque, $A \ni a \mapsto [a] = (a, 0, 0, \cdots) \in W_p(A)$ est un morphisme de monoïdes multiplicatifs.

Remarque : Dans $W_p(A)$, les composantes fantômes ont la forme

$$\wp_{p^n}(a_0, a_1, \cdots) = \sum_{i=0}^{n} p^i a_i^{p^{n-i}} = a_0^{p^n} + p a_1^{p^{n-1}} + p^2 a_2^{p^{n-2}} + \cdots$$

Si A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre, on a $\sum_{i\geq 0}[a_i]p^i = (a_0, a_1^p, a_2^{p^2}, \dots)$, donc si A est parfait tout élément de $W_p(A)$ s'écrit de façon unique $\sum_{i\geq 0}[a_i]p^i$ pour des $a_i \in A$.

Structure de λ-anneau sur les grands vecteurs de Witt

Morphismes de Frobenius

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $nS \subset S$, il existe une unique transformation naturelle $\Phi_n \colon W_S \Rightarrow W_S$ telle que $\mathrm{gh}_m(\Phi_n(w)) = \mathrm{gh}_{mn}(w)$ pour tous $w \in W_S(A)$ et $m \in S$.

En particulier, dans $W_p(A)$ pour $A/\mathbb{F}_p$ parfaite, on a $\Phi_p([a]) = [a]^p$

Remarque : Le Frobenius est en fait défini comme transformations $\Phi_n^r \colon W_S^{\leq r} \to W_S^{<r}$.

Grands vecteurs de Witt

Lorsque $S = \mathbb{N}$, et $W_{\mathbb{N}}(A) = W(A) \simeq \Lambda(A)$, Φ_n s'identifie à la norme $N_{A[\![t]\!]/A[\![t^n]\!]} \colon A[\![t]\!] \to A[\![t^n]\!] \subset A[\![t]\!]$, *i.e.* $\Phi_n(f)(t^n) = N_{A[\![t]\!]/A[\![t^n]\!]}(f)(t)$ pour $f(t) \in \Lambda(A)$.
En effet, $N_{A[\![t]\!]/A[\![t^n]\!]}(1 - at) = \det((-) \cdot (1 - at)) = 1 - a^n t^n$.

Ainsi $W_p(A)$ est un λ-anneau p-typique, et $W(A) \simeq \Lambda(A)$ est un λ-anneau.

Propriétés universelles : (co)liberté et représentabilité

Proposition

1. Le foncteur $W = \Lambda\colon \mathfrak{Ann} \to \lambda\text{—}\mathfrak{Ann}$ est adjoint à droite du foncteur d'oubli.
2. L'adjonction est comonadique, *i.e.* induit une équivalence de catégories entre les λ-anneaux et les cogèbres sur la comonade W.

Proposition

Le foncteur W est coreprésentable par $\mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \dots]$; en particulier c'est un schéma en anneaux affine sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Corollaire

Le foncteur d'oubli $\lambda\text{—}\mathfrak{Ann} \to \mathfrak{Ann}$ admet également un adjoint à gauche (donné par tenseur avec la pléthore $\mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \dots]$).

Sommaire - Section 2 : Basculement des anneaux perfectoïdes

Sommaire - Section 2 : Basculement des anneaux perfectoïdes

Basculement et débasculements

Soit A un anneau. Son p-**basculé** $A^\flat$ est la perfection de $A/(p)$, soit $A^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A/(p)$.

Remarque 1 : Un élément s'écrit $(b_0, b_1, \dots)$, $b_i \in A/(p)$, où $b_{i+1}^p = b_i$.

Remarque 2 : $\varprojlim_{x \mapsto x^n} A$ est un monoïde (multiplicatif), isomorphe à $A^\flat$.

Basculement et débasculements

Soit A un anneau. Son p**-basculé** $A^\flat$ est la perfection de $A/(p)$, soit $A^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A/(p)$.

Remarque 1 : Un élément s'écrit $(b_0, b_1, \dots)$, $b_i \in A/(p)$, où $b_{i+1}^p = b_i$.

Remarque 2 : $\varprojlim_{x \mapsto x^n} A$ est un monoïde (multiplicatif), isomorphe à $A^\flat$.

Définition

L'application de **débasculement** $(-)^\sharp \colon A^\flat \to A$ est donnée par $\varprojlim_{x \mapsto x^n} A \ni (a_0, a_1, \dots) \mapsto a_0$, ou

$\varprojlim_{x \mapsto x^n} A/(p) \ni (b_0, b_1, \dots) \mapsto \lim_{n \to \infty} \widetilde{b_n}^{p^n}$ pour des relèvements $\widetilde{b_n} \in A$ des $b_n \in A/(p)$.

C'est un morphisme de monoïdes multiplicatifs, et un morphisme d'anneaux $\mod p$.

Le foncteur $(-)^\flat$ est adjoint à droite de $W_p \colon \mathbb{F}_p\text{--}\mathfrak{Alg}^{\mathrm{parf}} \to \mathbb{Z}_p\text{--}\mathfrak{Alg}^{p\text{--adiques}}$.

L'application de Fontaine

Soit A un anneau ϖ-adiquement complet pour un $\varpi \in A$ divisant p. On note $\varphi\colon A/(p) \to A/(p)$ le Frobenius, et $\varphi^r\colon W_p^{<p^r}(A^\flat) \to W_p^{<p^r}(A^\flat)$.
L'**anneau des périodes infinitésimales** est $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \coloneqq W_p(A^\flat)$.

L'application de Fontaine

Soit A un anneau ϖ-adiquement complet pour un $\varpi \in A$ divisant p. On note $\varphi\colon A/(p) \to A/(p)$ le Frobenius, et $\varphi^r\colon W_p^{<p^r}(A^\flat) \to W_p^{<p^r}(A^\flat)$.
L'**anneau des périodes infinitésimales** est $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \coloneqq W_p(A^\flat)$.

Lemme

Isomorphismes

$$W_p(A^\flat) \xleftarrow[\varphi^\infty]{\simeq} \varprojlim_{r,\Phi_p^{<p^r}} W_p^{<p^r}(A^\flat) \simeq \varprojlim_{r,\Phi_p^{<p^r}} W_p^{<p^r}(A),$$

où φ^∞ est induit par les φ^r, et le second induit par $A^\flat \simeq \varprojlim_\varphi A/(\varpi) \simeq \varprojlim_\varphi A$.

L'application de Fontaine

Soit A un anneau ϖ-adiquement complet pour un $\varpi \in A$ divisant p. On note $\varphi\colon A/(p) \to A/(p)$ le Frobenius, et $\varphi^r\colon W_p^{<p^r}(A^\flat) \to W_p^{<p^r}(A^\flat)$.
L'**anneau des périodes infinitésimales** est $\mathbb{A}_{\inf}(A) \coloneqq W_p(A^\flat)$.

Lemme

Isomorphismes

$$W_p(A^\flat) \xleftarrow[\varphi^\infty]{\simeq} \varprojlim_{r,\Phi_p^{<p^r}} W_p^{<p^r}(A^\flat) \simeq \varprojlim_{r,\Phi_p^{<p^r}} W_p^{<p^r}(A),$$

où φ^∞ est induit par les φ^r, et le second induit par $A^\flat \simeq \varprojlim_\varphi A/(\varpi) \simeq \varprojlim_\varphi A$.

On définit les applications de Fontaine $\widetilde{\theta}_r\colon \mathbb{A}_{\inf}(A) \to W_p^{<p^r}(A)$ comme les composées de l'isomorphisme avec la projection appropriée, et $\theta_r = \varphi^r \circ \widetilde{\theta}_r$.

$\theta \coloneqq \theta_1\colon W_p(A^\flat) \to A, \sum_{i\geq 0}[b_i]p^i \mapsto \sum_{i\geq 0} b_i^\sharp p^i$ est la co-unité de l'adjonction.

Classification des débasculements d'algèbres parfaites

Définition

Un **débasculement** d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite A est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adique $A^\sharp$ avec un isomorphisme $A \simeq (A^\sharp)^\flat$.

Classification des débasculements d'algèbres parfaites

Définition

Un **débasculement** d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite A est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adique $A^\sharp$ avec un isomorphisme $A \simeq (A^\sharp)^\flat$.

Un vecteur de Witt $\sum[\alpha_i]p^i \in W_p(A) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A^\sharp)$ est **primitif de degré** 1 si $\alpha_1 \in A^\times$.

Théorème

L'application de Fontaine $\theta\colon W_p(A) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A^\sharp) \to A^\sharp$ est surjective, et son noyau est un idéal principal engendré par un élément primitif de degré 1.

Classification des débasculements d'algèbres parfaites

Définition

Un **débasculement** d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite A est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adique $A^\sharp$ avec un isomorphisme $A \simeq (A^\sharp)^\flat$.

Un vecteur de Witt $\sum[\alpha_i]p^i \in W_p(A) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A^\sharp)$ est **primitif de degré** 1 si $\alpha_1 \in A^\times$.

Théorème

L'application de Fontaine $\theta \colon W_p(A) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A^\sharp) \to A^\sharp$ est surjective, et son noyau est un idéal principal engendré par un élément primitif de degré 1.

Si $\alpha \in W_p(A)$ est primitif de degré 1, alors $W_p(A)/(\alpha)$ est un débasculé de A, par $A \xrightarrow{\simeq} (W_p(A)/(\alpha))^\flat, a \mapsto ([a^{1/p^n}] \mod \alpha)_n$.

Classification des débasculements d'algèbres parfaites

Définition

Un **débasculement** d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite A est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adique $A^\sharp$ avec un isomorphisme $A \simeq (A^\sharp)^\flat$.

Un vecteur de Witt $\sum [\alpha_i] p^i \in W_p(A) = \mathbb{A}_{\inf}(A^\sharp)$ est **primitif de degré** 1 si $\alpha_1 \in A^\times$.

Théorème

L'application de Fontaine $\theta\colon W_p(A) = \mathbb{A}_{\inf}(A^\sharp) \longrightarrow A^\sharp$ est surjective, et son noyau est un idéal principal engendré par un élément primitif de degré 1.

Si $\alpha \in W_p(A)$ est primitif de degré 1, alors $W_p(A)/(\alpha)$ est un débasculé de A, par $A \xrightarrow{\simeq} (W_p(A)/(\alpha))^\flat, a \mapsto ([a^{1/p^n}] \mod \alpha)_n$.

Corollaire

Correspondance biunivoque $\{\text{débasculés de } A\}/(\simeq) \xrightarrow{\simeq} \{\text{primitifs de degré } 1\}/W_p(A)^\times$.

Sommaire - Section 2 : Basculement des anneaux perfectoïdes

Définition

Un **anneau p-perfectoïde entier** est un anneau topologique A dans lequel il existe un non diviseur de zéro ϖ tel que

- $p \in (\varpi^p) = \varpi^p A$ (*i.e.* ϖ^p divise p)
- la topologie sur A est la topologie ϖ-adique, et A est complet (*i.e.* $A \simeq \varprojlim_n A/(\varpi^n)$)
- le Frobenius $A/(\varpi) \to A/(\varpi^p), a \mapsto a^p$ est un isomorphisme.

On appelle un tel ϖ une **pseudo-uniformisante perfectoïde** (ou p.u.p.) de A.

Définition

Un **anneau p-perfectoïde entier** est un anneau topologique A dans lequel il existe un non diviseur de zéro ϖ tel que

- $p \in (\varpi^p) = \varpi^p A$ (*i.e.* ϖ^p divise p)
- la topologie sur A est la topologie ϖ-adique, et A est complet (*i.e.* $A \simeq \varprojlim_n A/(\varpi^n)$)
- le Frobenius $A/(\varpi) \to A/(\varpi^p), a \mapsto a^p$ est un isomorphisme.

On appelle un tel ϖ une **pseudo-uniformisante perfectoïde** (ou p.u.p.) de A.

Exemples

- Les complétions p-adiques de $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$ et de $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^\infty}]$, avec p.u.p. $p^{1/p}$ et $(\zeta_{p^2} - 1)$.
- Si A perfectoïde entier avec p.u.p. ϖ, $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ complétion ϖ-adique de $\bigcup_{n\geq 1} A[T^{1/p^n}]$.

Propriétés de perfection des anneaux perfectoïdes

Soit A un anneau topologique complet de caractéristique p. Alors A est p-perfectoïde entier ssi il est parfait et sa topologie est ϖ-adique pour un non-diviseur de zéro $\varpi \in A$.

Proposition

Soit A un anneau p-perfectoïde entier et ϖ une p.u.p.

- Tout élément de $A/(p\varpi)$ est une racine p-ième.
- En multipliant ϖ par une unité $u \in A^{\times}$, on peut s'assurer que la p.u.p. admet un système de racines p^n-ièmes $\varpi^{1/p^n} \in A$, $n \geq 1$.

Corollaire

Pour tout anneau perfectoïde entier A avec p.u.p. ϖ, la $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite $A^\flat$ contient un élément $\varpi^\flat \coloneqq (\varpi, \varpi^{1/p}, \varpi^{1/p^2}, \ldots)$, quitte à multiplier ϖ par une unité au préalable.

Basculés d'anneaux perfectoïdes entiers

Soit A un anneau perfectoïde entier avec p.u.p. ϖ. Alors : $A^\flat$ est un anneau perfectoïde entier avec p.u.p. $\varpi^\flat$, et l'application de débasculement $(-)^\sharp\colon A^\flat \to A$ est continue.

Exemple d'une algèbre de polynômes perfectoïde

$A\langle T^{1/p^\infty}\rangle^\flat$ contient $T^\flat \coloneqq (T, T^{1/p}, \dots)$, et il y a un isomorphisme $A^\flat\langle U^{1/p^\infty}\rangle \xrightarrow{\simeq} A\langle T^{1/p^\infty}\rangle^\flat$ appliquant U sur $T^\flat$.

Basculés d'anneaux perfectoïdes entiers

Soit A un anneau perfectoïde entier avec p.u.p. ϖ. Alors : $A^\flat$ est un anneau perfectoïde entier avec p.u.p. $\varpi^\flat$, et l'application de débasculement $(-)^\sharp \colon A^\flat \to A$ est continue.

Exemple d'une algèbre de polynômes perfectoïde

$A\langle T^{1/p^\infty}\rangle^\flat$ contient $T^\flat \coloneqq (T, T^{1/p}, \dots)$, et il y a un isomorphisme $A^\flat\langle U^{1/p^\infty}\rangle \xrightarrow{\simeq} A\langle T^{1/p^\infty}\rangle^\flat$ appliquant U sur $T^\flat$.

L'application de Fontaine

Un anneau A ϖ-adiquement complet pour un ϖ tel que $\varpi^p | p$ est perfectoïde ssi l'application de Fontaine $\theta \colon \mathbb{A}_{\mathrm{inf}(A)} = W(A^\flat) \to A$ est surjective et son noyau un idéal principal. Dans ce cas, le générateur de $\ker \theta$ est primitif de degré 1.

Remarque : $\theta = \theta_1$ est surjective ssi $\theta_r \colon \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \to W_p^{<p^r}(A)$ surjective $\forall r \geq 0$

Correspondance de basculement

Définition

Soit A un anneau perfectoïde avec p.u.p. ϖ. Une A-algèbre **perfectoïde** est une A-algèbre $A \to B$ telle qu'équiper B de la topologie induite (ϖB-adique) en fait un anneau perfectoïde entier.

Le foncteur

$$A\text{—}\mathfrak{Alg}^{\mathrm{perfd}} \ni B \mapsto B^\flat \in A^\flat\text{—}\mathfrak{Alg}^{\mathrm{perfd}}$$

est une équivalence de catégories, avec quasi-inverse

$$C \mapsto C^\sharp \coloneqq W_p(C) \otimes_{\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A)} A = W_p(C)/(\ker \theta).$$

L'équivalence se restreint à un isomorphisme de treillis entre les sous-algèbres perfectoïdes de A et celles de $A^\flat$.

Idée de preuve

1. Pour toute A-algèbre perfectoïde B, vérifier que $(B^\flat)^\sharp = B$.

Idée de preuve

1. Pour toute A-algèbre perfectoïde B, vérifier que $(B^\flat)^\sharp = B$. La commutativité du diagramme de naturalité pour θ

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll] \\ W_p(B^\flat) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(B) \arrow[u, "\theta_B"] & & \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \arrow[ll] \arrow[u, "\theta_A"'] \end{tikzcd}$$

implique que le générateur $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ de $\ker \theta_A$ est envoyé dans $\ker \theta_B$.

Idée de preuve

1. Pour toute A-algèbre perfectoïde B, vérifier que $(B^\flat)^\sharp = B$. La commutativité du diagramme de naturalité pour θ

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll] \\ W_p(B^\flat) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(B) \arrow[u, "\theta_B"] & & \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \arrow[ll] \arrow[u, "\theta_A"'] \end{tikzcd}$$

   implique que le générateur $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ de $\ker \theta_A$ est envoyé dans $\ker \theta_B$. De même l'image de sa première composante de Witt ξ_1 est bien une unité (*i.e.* l'image de ξ est primitive de degré 1)

Idée de preuve

1. Pour toute A-algèbre perfectoïde B, vérifier que $(B^\flat)^\sharp = B$. La commutativité du diagramme de naturalité pour θ

$$\begin{tikzcd}
B & & A \arrow[ll] \\
W_p(B^\flat) = \mathbb{A}_{\inf}(B) \arrow[u, "\theta_B"] & & \mathbb{A}_{\inf}(A) \arrow[ll] \arrow[u, "\theta_A"']
\end{tikzcd}$$

implique que le générateur $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ de $\ker \theta_A$ est envoyé dans $\ker \theta_B$. De même l'image de sa première composante de Witt ξ_1 est bien une unité (*i.e.* l'image de ξ est primitive de degré 1), donc $\ker \theta_B = \xi \mathbb{A}_{\inf}(B)$ et la flèche canonique $\mathbb{A}_{\inf}(B) \otimes_{\mathbb{A}_{\inf}(A)} A =: (B^\flat)^\sharp \to B$ est un isomorphisme.

Idée de preuve II

1. Pour toute $A^\flat$-algèbre perfectoïde C, vérifier que $C^\sharp$ est une A-algèbre perfectoïde.

Idée de preuve II

1. Pour toute $A^\flat$-algèbre perfectoïde C, vérifier que $C^\sharp$ est une A-algèbre perfectoïde. Elle est ϖ-adiquement complète par propriété des anneaux de Witt. Pour la perfection mod ϖ^p, on remarque que $\xi \equiv p \mod [\varpi^\flat]^p$ donc

$$C^\sharp/\varpi C^\sharp \coloneqq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat] \rangle \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat] \rangle \simeq C/(\varpi^\flat),$$

Idée de preuve II

1. Pour toute $A^\flat$-algèbre perfectoïde C, vérifier que $C^\sharp$ est une A-algèbre perfectoïde. Elle est ϖ-adiquement complète par propriété des anneaux de Witt. Pour la perfection mod ϖ^p, on remarque que $\xi \equiv p \mod [\varpi^\flat]^p$ donc

$$C^\sharp/\varpi C^\sharp \coloneqq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat] \rangle \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat] \rangle \simeq C/(\varpi^\flat),$$

et comme $\varpi^\flat$ est une p.u.p. de C on a

$$C/(\varpi^\flat) \xrightarrow{\simeq} C/((\varpi^\flat)^p) \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat]^p \rangle \simeq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat]^p \rangle \eqqcolon C^\sharp/\varpi^p C^\sharp$$

soit $C^\sharp/\varpi C^\sharp \xrightarrow{\simeq} C^\sharp/\varpi^p C^\sharp$.

Idée de preuve II

1. Pour toute $A^\flat$-algèbre perfectoïde C, vérifier que $C^\sharp$ est une A-algèbre perfectoïde. Elle est ϖ-adiquement complète par propriété des anneaux de Witt. Pour la perfection mod ϖ^p, on remarque que $\xi \equiv p \mod [\varpi^\flat]^p$ donc

$$C^\sharp/\varpi C^\sharp \coloneqq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat] \rangle \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat] \rangle \simeq C/(\varpi^\flat),$$

   et comme $\varpi^\flat$ est une p.u.p. de C on a

$$C/(\varpi^\flat) \xrightarrow{\simeq} C/((\varpi^\flat)^p) \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat]^p \rangle \simeq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat]^p \rangle \eqqcolon C^\sharp/\varpi^p C^\sharp$$

   soit $C^\sharp/\varpi C^\sharp \xrightarrow{\simeq} C^\sharp/\varpi^p C^\sharp$.
2. Vérifier que $(C^\sharp)^\flat = C$.

Idée de preuve II

1. Pour toute $A^\flat$-algèbre perfectoïde C, vérifier que $C^\sharp$ est une A-algèbre perfectoïde. Elle est ϖ-adiquement complète par propriété des anneaux de Witt. Pour la perfection mod ϖ^p, on remarque que $\xi \equiv p \mod [\varpi^\flat]^p$ donc

$$C^\sharp/\varpi C^\sharp \coloneqq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat] \rangle \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat] \rangle \simeq C/(\varpi^\flat),$$

et comme $\varpi^\flat$ est une p.u.p. de C on a

$$C/(\varpi^\flat) \xrightarrow{\simeq} C/((\varpi^\flat)^p) \simeq W_p(C)/\langle p, [\varpi^\flat]^p \rangle \simeq W_p(C)/\langle \xi, [\varpi^\flat]^p \rangle \eqqcolon C^\sharp/\varpi^p C^\sharp$$

soit $C^\sharp/\varpi C^\sharp \xrightarrow{\simeq} C^\sharp/\varpi^p C^\sharp$.

2. Vérifier que $(C^\sharp)^\flat = C$. En passant à la limite, on obtient que $(C^\sharp)^\flat \coloneqq \varprojlim_{x \mapsto x^p} C^\sharp/\varpi C^\sharp \simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} C/(\varpi^\flat) \eqqcolon C^\flat$, et C est parfaite $/\mathbb{F}_p$ donc $C^\flat = C$.

Références

- Bhargav Bhatt, Matthew Morrow et Peter Scholze, *Integral p-adic Hodge theory*
- Dori Bejleri, *Perfectoid rings and* $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$
- Michiel Hazewinkel, *Witt vectors*
- Lars Hesselholt, *Lecture notes on Witt vectors*
- Matthew Morrow, *Adic and perfectoid spaces* (cours M2)