Prismes et anneaux perfectoïdes

David Kern

3 juillet 2019

Table des matières

1 La catégorie des prismes **1**
1.1 Complétions dérivées 1
1.2 Globalisation des éléments distingués 2
1.3 Les prismes 3

2 Anneaux perfectoïdes et prismes parfaits **3**
2.1 Propriétés des prismes parfaits 3
2.2 Anneaux perfectoïdes entiers 4

1 La catégorie des prismes

1.1 Complétions dérivées

Définition 1. *Soient* A *un anneau, et* M *un* A*-module. Pour toute famille* $(g_\upsilon)_{\upsilon\in\Upsilon}$ *d'éléments de* A*, on voit alors* M *comme un* $\mathbb{Z}[g_\upsilon]$*-module. Soit* I *un idéal de type fini de* A *et fixons une famille* $(f_1, \dots, f_r)$ *de générateurs de* I*.*

Le complété dérivé de M *selon* I *est*

$$\widehat{M} \coloneqq \mathbb{R}\varprojlim_n M \underset{\mathbb{Z}[f_i^n]}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathbb{Z} \tag{1}$$

On dit que M *est* I*-complet au sens dérivé si le morphisme canonique* $M \to \widehat{M}$ *est un isomorphisme.*

Remarque 2. Si I est régulier (par exemple s'il est principal), ou si A est nœthérien, on peut aussi construire $\widehat{M}$ à partir des quotients homotopiques $M \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}[f_i]} \mathbb{Z}[f_i]/(f_i^n)$.

Construction 3. On peut donner un modèle explicite pour la condition de I-complétude dérivée à l'aide de complexes de Koszul. Plus précisément, le produit tensoriel dérivé $\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}[f_i]} \mathbb{Z}$ peut être représenté par le complexe de cochaînes

$$\cdots \to \bigoplus_{i<j} M \to \bigoplus_{i=1}^{r} M \xrightarrow{(f_i)_{1\leq i\leq r}} M \to 0. \tag{2}$$

Alors M est I-complet au sens dérivé si et seulement si pour tout $f \in I$ le A-module dérivé $\mathbb{R}\lim(\cdots \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M)$ est contractile.

Propostion 4. *Un* A*-module dérivé* M *est* I*-complet au sens dérivé si et seulement si chacun de ses* A*-modules d'homotopie l'est.*

Définition 5. *On note* $M[I]$ *l'ensemble des éléments de* I *torsion du* A*-module* M*. On note aussi* $M[I^\infty] = \bigcup_k M[I^k]$.

On dit que M *est de* I^∞*-torsion bornée s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $M[I^\infty] = M[I^k]$.

Lemme 6. *Si* M *est de* I^∞*-torsion bornée, le* I*-complété dérivé de* M *est discret (et coïncide avec le complété* I*-adique classique).*

Définition 7. *Un* A*-module (potentiellement dérivé)* M *est* I*-complètement plat si* $M \otimes_A^{\mathbb{L}} N$ *est discret pour tout* A*-module de* I*-torsion* N*. On dit que* M *est* I*-complètement fidèlement plat si en outre le* A/I*-module plat* $M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/I$ *est un* A/I*-module fidèlement plat.*

Une A*-algèbre* R I*-complète au sens dérivé est* I*-complètement étale (resp.* I*-complètement lisse) si* $R \otimes_A^{\mathbb{L}} A/I$ *est étale (resp. lisse). De façon équivalente, c'est l'*I*-complétée dérivée d'une* A*-algèbre étale (resp. lisse).*

Propostion 8. *Le* I*-complété dérivé d'un* A*-module plat est* I*-complètement plat.*

1.2 Globalisation des éléments distingués

On notera $\mathrm{Rad}(A)$ le radical de Jacobson d'un anneau A, l'intersection de ses idéaux maximaux. Rappelons que dans un δ-anneau (A, δ) tel que $p \in \mathrm{Rad}(A)$, un élément d de $\mathrm{Rad}(A)$ est distingué si et seulement si $(p) \subset (d, \phi_{(\delta)}(d))$: en particulier la condition d'être distingué ne dépend pas de d lui-même mais uniquement de l'idéal qu'il engendre.

Lemme 9 ([BS19, Lemma 3.1],[Bha19, Corollary 1.9])**.** *Soient* (A, δ) *un* δ*-anneau et* I *un idéal de* A *localement principal tel que* $(p, I) \subset \mathrm{Rad}(A)$*. Alors on a* $(p) \subset (I, \phi_{(\delta)}(I))$ *si et seulement si* I *est pro-Zariski-localement engendré par un élément distingué. Dans ce cas on a aussi* $(p) \subset (I^p, \phi_{(\delta)}(I))$.

Par « pro-Zariski localement » on entend qu'il existe un δ-morphisme fidèlement plat $A \to \widetilde{A}$ qui est une pro-immersion Zariski-ouverte (*i.e.* une ind-localisation, en fait un produit fini de localisation à des parties multiplicatives δ-stables) tel que $I\widetilde{A}$ soit engendré par un élément distingué.

Démonstration (construction de $\widetilde{A}$*).* Choisissons un recouvrement ouvert $(D(g_1), \ldots, D(g_r))$ de A tel que la restriction $I \cdot A[g_i^{-1}]$ de I à chacun des ouverts distingués $D(g_i)$ soit principale. Alors $\widetilde{A}$ est le produit cartésien des localisations de $A[g_i^{-1}]$ le long des fermés $V(p, I)$. □

Définition 10. *Un idéal* I *respectant la condition* $(p) \subset (I, \phi_{(\delta)}(I))$ *est dit* ***distingué****.*

Remarque 11. La fait pour un idéal I d'être distingué correspond géométriquement à la condition que l'intersection des fermés $V(I)$ et $\phi_{(\delta)}^{-1}V(I)$ soit uniquement en caractéristique p.

1.3 Les prismes

On appelle δ-**paire** une paire $((A, \delta), I)$ d'un δ-anneau (A, δ) et un idéal I de A. Un morphisme de δ-paires $((A, \delta), I) \to ((B, \varepsilon), J)$ est donné par un morphisme $A \to B$ des anneaux sous-jacents induisant des morphismes de δ-anneaux $(A, \delta) \to (B, \varepsilon)$ et de paires $(A, I) \to (B, J)$.

Définition 12 (Prisme)**.** *La catégorie $\mathfrak{Prismes}$ des **prismes** est la sous-catégorie pleine de la catégorie des δ-paires sur les $((A, \delta), I)$ vérifiant :*

1. I *définit un diviseur de Cartier sur* $\operatorname{Spec} A$*,*
2. A *est* (p, I)*-complet au sens dérivé,*
3. I *est distingué.*

*Un prisme $((A, \delta), I)$ est dit **orientable** si I est principal. Une **orientation** est un choix de générateur pour I.*

Propostion 13 ([BS19, Lemma 3.5],[Bha19, Lemma 3.7])**.** *Soit $((A, \delta), I) \to ((B, \varepsilon), J)$ un morphisme de prismes. Alors l'application canonique $I \otimes_A B \to J$ est un isomorphisme ; en particulier $I \cdot B = J$.*

Réciproquement, étant donné un morphisme de δ-anneaux $(A, \delta) \to (B, \varepsilon)$ avec $((A, \delta), I)$ un prisme et tel que B soit $(p, I \cdot B)$-complet au sens dérivé, $((B, \varepsilon), I \cdot B)$ est un prisme si et seulement si B est sans I-torsion, $B[I] = 0$.

Exemple 14.
— [BS19, Example 3.3] Pour tout δ-anneau A p-complet et sans p-torsion, $((A, \delta), (p))$ est un prisme. Les tels prismes, avec $I = (p)$, sont dits **cristallins**, et sont tous de cette forme.
— L'anneau $A = \mathbb{Z}_p[[q-1]]$, complétion $(p, q-1)$-adique de $\mathbb{Z}[q]$, avec la δ-structure telle que $\delta(q) = 0$ (ou $\phi_{(\delta)}(q) = q^p$), et l'élément distingué $d = [p]_q \coloneqq \frac{q^p-1}{q-1} = \sum_{i=0}^{p-1} q^i$.

Lemme 15 ([BS19, Lemma 3.6],[Bha19, Lemma 3.5])**.** *Soit $((A, \delta), I)$ un prisme. Alors l'idéal engendré par $\phi_{(\delta)}(I)$ est principal, et tout générateur est distingué. En outre les fibrés en droites I^p et $\phi_{(\delta)}^*(I) = I \otimes_{A, \phi_{(\delta)}} A$ sont triviaux.*

Corollaire 16. *Si $\phi_{(\delta)}$ est inversible, c'est-à-dire (par définition) que (A, δ) est parfait, alors I est principal et nécessairement engendré par un élément distingué.*

2 Anneaux perfectoïdes et prismes parfaits

2.1 Propriétés des prismes parfaits

Définition 17. *Soit $((A, \delta), I)$ un prisme. On dit qu'il est **parfait** si (A, δ) est un δ-anneau parfait, et qu'il est **borné** si A/I est de $(p)^\infty$-torsion bornée.*

On note $\mathfrak{Prismes}^{\mathrm{parf}}$ la sous-catégorie pleine des prismes parfaits.

Rappelons que le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie pleine des δ-anneaux parfaits dans les δ-anneaux admet des adjoints à gauche et à droite, les foncteurs de **coperfection** $(A, \delta) \mapsto A_{\mathrm{perf}} = \varinjlim_{\phi_{(\delta)}} A$ et de **perfection** $(A, \delta) \mapsto A^{\mathrm{perf}} = \varprojlim_{\phi_{(\delta)}} A$.

Propostion 18 ([BS19, Lemma 3.8],[Bha19, Lemma IV 1.3]). *Soit* $((A, \delta), I)$ *un prisme. Alors* $I \cdot A_{\mathrm{perf}}$ *est principal et engendré par un élément distingué* $d \in A$ *qui est, ainsi que* p*, non diviseur de zéro, et* $A/(d)$ *est de* p*-torsion bornée (en fait d'ordre* 1*, i.e.* $A/(d)[p^\infty] = A/(d)[p]$*).*

Ainsi le (p, I)*-complété dérivé* A_∞ *de* A_{perf} *coïncide avec le complété* (p, I)*-adique classique, et* $(A_\infty, I \cdot A_\infty)$ *est initial parmi les prismes parfaits sous* $((A, \delta), I)$ *: on a de fait un adjoint à gauche à l'inclusion des prismes parfaits dans les prismes.*

Lemme 19 ([BS19, Lemma 3.7],[Bha19, Lemma IV 1.2]). *Tout prisme parfait* $((A, \delta), I)$ *est borné, et en particulier* (p, I)*-complet au sens classique.*

Lemme 20 ([BS19, Lemma 3.11]). *Soit* $((A, \delta), I)$ *un prisme borné. Alors :*

1. A *est* (p, I)*-adiquement complet (au sens classique) et tout* A*-module dérivé* (p, I)*-complètement plat* M *est discret,* (p, I)*-adiquement complet, et est sans* I^n*-torsion pour tout* $n \geq 0$ *avec en outre* M/I^nM *de* $(p)^\infty$*-torsion bornée.*
2. *Le foncteur* $\delta - A - \mathfrak{Alg}^{(p,I)-(\text{fid.})\text{plates}} \to \mathfrak{Prismes}^{((A,\delta),I)/,(\text{fid.})\text{plats}}, (B, \varepsilon) \mapsto ((B, \varepsilon), IB)$ *est une équivalence de catégories.*
3. $((A, \delta), I)$ *est localement orientable, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de prismes* (p, I)*-complètement fidèlement plat* $((A, \delta), I) \to ((B, \varepsilon), (d))$*, qui peut même être choisi comme la* (p, I)*-complétion dérivée d'une ind-localisation de Zariski de* A*.*

Propostion 21 ([BS19, Corollary 3.14]). *Soit* $((A, \delta), I)$ *un prisme borné. Soit* $\delta - \mathfrak{Paires}_{(A,\delta)}$ *la catégorie des* δ*-paires* $((B, \varepsilon), J)$ *telles que* (B, ε) *est une* δ*-*(A, δ)*-algèbre* (p, I)*-complètement libre et* $B \twoheadrightarrow B/J$ *un morphisme d'*A*-algèbres, avec* B/J *une* A/I*-algèbre* p*-complètement lisse. Alors le foncteur d'inclusion* $\mathfrak{Prismes}^{((A,\delta),I)/} \to \delta - \mathfrak{Paires}_{(A,\delta)}$ *admet un adjoint à gauche.*

Esquisse de construction, [BS19, Proposition 3.13]. On se réduit au cas où B est une δ-(A, δ)-algèbre (p, I)-complètement plate et $J = IB + J_0$ avec J_0 un idéal (p, I)-complètement régulier relativement à A, donc engendré par une suite (p, I)-complètement régulière relativement à A $(f_1, \ldots, f_r)$. En travaillant Zariski-localement, on peut aussi supposer que I est principal et engendré par l'élément distingué $d \in A$.

Alors le morphisme initial de $((B, \varepsilon), J)$ vers un prisme est l'application canonique vers $B\left\{\frac{f_1}{d}, \ldots, \frac{f_r}{d}\right\}^{\wedge}$, qui est bien (p, I)-complètement plat sur A et donc discret et sans d-torsion. □

Au vu de la construction de l'adjoint à gauche, on note $\widehat{B\left\{\frac{J}{I}\right\}}$ l'image d'une $((B, \varepsilon), J) \in \delta - \mathfrak{Paires}_{(A,\delta)}$.

2.2 Anneaux perfectoïdes entiers

Rappel 22 (Anneaux perfectoïdes entiers et application de Fontaine). Un anneau perfectoïde entier (p-typique) est par définition un anneau topologique A admettant une pseudo-uniformisante perfectoïde ϖ, non-diviseur de zéro, tel que

— A est (topologiquement) complet et sa topologie est (ϖ)-adique,
— ϖ^p divise p,
— le Frobenius $A/(\varpi) \to A/(\varpi^p)$ est un isomorphisme.

Par exemple un anneau de caractéristique p est p-perfectoïde si et seulement si il est parfait (en tant que $\mathbb{F}_p$-algèbre) ϖ-adiquement complet pour un non-diviseur de zéro ϖ.

Pour un anneau perfectoïde A, on note $A^\flat$ son p-basculé, la p-perfection de $A/(p)$, qui est un anneau perfectoïde avec p.u.p. $\varpi^\flat = (\varpi, \varpi^{1/p}, \cdots)$ (où ϖ est une p.u.p. de A, admettant un système compatible de racines p-ièmes après multiplication par une unité). L'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \coloneqq W_p(A^\flat)$ paramétrise les débasculements de $A^\flat$, les déformations de A autour de la caractéristique p.

Rappelons que l'application de Fontaine est la counité $\theta_A \colon \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A) \to A$ de l'adjonction $W_p(-) \dashv (-)^\flat$. Alors un anneau A qui est (ϖ)-adiquement complet pour un non-diviseur de zéro ϖ est perfectoïde si et seulement si θ_A est une surjection et son noyau un idéal principal. Dans ce cas, le générateur de $\ker \theta_A$ est un élément primitif de degré 1 (*i.e.* distingué). Réciproquement, pour tout χ primitif de degré 1, $(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A)/(\chi))^\flat \xrightarrow{\simeq} A^\flat$.

Théorème 23. *Le foncteur* $\mathfrak{Prismes}^{\mathrm{parf}} \to \mathfrak{Ann}$, $(A, I) \mapsto A/I$ *est pleinement fidèle, et les anneaux dans son image essentielle sont les anneaux perfectoïdes entiers. Un quasi-inverse* $\mathfrak{Perfd} \to \mathfrak{Prismes}^{\mathrm{parf}}$ *est donné par* $A \mapsto (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(A), \ker \theta_A)$.

Remarque 24. La propriété de pleine fidélité est en fait plus forte : d'après [BS19, Lemma 4.7], on a un isomorphisme $\hom_{\mathfrak{Ann}}(A/I, B/J) \simeq \hom_{\mathfrak{Prismes}}((A, I), (B, J))$ dès que (A, I) est un prisme parfait. Cependant il n'est pas vrai que le foncteur $\mathfrak{Prismes} \to \mathfrak{Ann}$, $(A, I) \mapsto A/I$ est fidèle ; un morphisme d'anneaux $A/I \to B/J$ peut être induit par différents morphismes de prismes $(A, I) \to (B, J)$ même si (B, J) est un prisme parfait lorsque (A, I) ne l'est pas.

Références

[Bha19] *Geometric aspects of* p*-adic Hodge theory*

[BS19] Bhargav Bhatt et Peter Scholze, *Prisms and prismatic cohomology*

[Stacks] *The Stacks project*, Chapitre « More on algebra »