# Théorie géométrique des champs pour les invariants de Gromov–Witten champêtres

David Kern

23 novembre 2021

Les invariants de Gromov–Witten d'une variété projective lisse produisent une théorie cohomologique des champs, s'exprimant comme une algèbre sur l'opérade des homologies de champs de modules de courbes. Si la cible est elle-même une orbifolde, la structure idoine s'exhibe sur (une version cyclotomique de) son champ d'inertie.Nous allons expliquer comment, suivant les travaux de Mann–Robalo pour les cibles schématiques, on peut grâce à la géométrie dérivée relever cette structure du cadre cohomologique à celui géométrique. La construction repose sur le phénomène d'action de membranes découvert par Toën, et produit de manière automatique les champs d'inertie à partir de données opéradiques.

## 1 Quasi-applications stables vers les quotients TGI

### 1.1 Stabilité et quasi-stabilité

Soit $V$ une variété affine propre munie d'une action d'un groupe algébrique réductif $G$. Fixons également une linéarisation de l'action de $G$ sur $V$, consistant en un fibré en droites ample $\mathcal{L}$ sur $V$ et une donnée de $G$-équivariance $\theta$ sur $\mathcal{L}$ ; par example $\mathcal{L}$ est le fibré trivial et $\theta$ correspond au choix d'un caractère de $G$.

Si $x\colon \operatorname{Spec}\Bbbk \to V$ est un point de $V$ et $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre, le morphisme $\lambda_x\colon \mathbb{G}_m \to V, \zeta \mapsto \lambda(\zeta)\cdot x$ s'étend (par propreté) à un morphisme (toujours $\mathbb{G}_m$-équivariant) $\overline{\lambda_x}\colon \mathbb{A}^1 \to V$, figurant donc (l'on rappelle que la gerbe résiduelle de $0$

dans $[\mathbb{A}^1_{\Bbbk}/\mathbb{G}_m]$ est $\mathcal{B}\mathbb{G}_m$) dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathbb{A}^1_{\Bbbk} \arrow[d, two heads] \arrow[rr, bend left, "\overline{\lambda_x}"] & \mathbb{G}_m \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\lambda_x"] \arrow[d, two heads] & V. \\
\mathcal{B}\mathbb{G}_m \arrow[r, hook] \arrow[rrru, bend right, "\overline{\lambda_x}(0)"'] & {[\mathbb{A}^1_{\Bbbk}/\mathbb{G}_m]} \arrow[rru, bend right] & \{1\} \arrow[l, hook'] \arrow[ru, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Le point $x\colon \operatorname{Spec}\Bbbk \to V$ est alors dit **stable** si pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to G$, le poids de $\overline{\lambda_x}(0)^*\mathcal{L}$ est négatif.

Ce lieu (semi)stable a l'avantage que le quotient $V^{\theta\text{-st}} \to V^{\theta\text{-st}}/G =: V /\!\!/_\theta G$ est un *bon quotient géométrique*, appelé le quotient de TGI.

Ciocan-Fontanine, Kim et Maulik proposent d'utiliser le plongement $V^{\theta\text{-st}} \hookrightarrow V$ pour relâcher la condition de stabilité dans la notion d'application stable vers $V /\!\!/_\theta G$. On va pouvoir se donner un paramètre $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$.

**Définition** (Quasi-application TGI)**.** *Une **quasi-application** $\varepsilon$**-stable** vers $V /\!\!/_\theta G$ est la donnée d'une courbe marquée $(C; x_1, \dots, x_n)$, d'un fibré $G$-principal $P \to C$, et d'une section $\mu\colon C \to P \times_G V$ du fibré associé, le tout vérifiant :*

- (***points-base***) *les images (par $\mu$) des points génériques des composantes irréductibles de $C$ sont dans $V^{\theta\text{-st}}$,*
- (***stabilité***) $\omega_{C,\log} \otimes \mu^*\mathcal{L}^\varepsilon$ *est ample*
- (***contre-stabilité***) *pour tout point $x \in C$, on a $\varepsilon\ell(x) \leq 1$, où $\ell(x)$ est l'ordre de contact de $\mu(C)$ avec $V^{\theta\text{-inst}}$ à $\mu(x)$.*

On remarque que la notion d'$\varepsilon$-stabilité n'est pas définie purement en termes de la cible $V /\!\!/_\theta G$ mais dépend de manière cruciale de sa présentation comme un quotient TGI.

En fait, comme l'ont remarqué Cheong, Ciocan-Fontanine et Kim, la notion de quasi-application $\varepsilon$-stable n'acquiert un réel sens géométrique que lorsqu'on la relève au contexte du champ quotient $[V/G]$. En effet :

— la donnée $(P \to C, \mu\colon C \to P \times_G V)$ correspond exactement à celle d'un $C$-point du champ $[V/G]$,

— la donnée de $G$-équivariance pour $\mathcal{L}$ sur $V$ est exactement une donnée de descente permettant de le relever à un fibré sur $[V/G]$,

— la notion de lieu stable a été généralisée par Halpern-Leistner, Heinloth, ... des champs quotients aux champs algébriques généraux.

Ainsi, la définition donnée ci-dessus doit être vue comme une spécialisation de la définition de quasi-application $\varepsilon$-stable vers un champ algébrique muni d'une polarisation (ou, mieux, d'une application quasi-stable vers un champ algébrique rationnellement polarisé).

Il se produit cependant un changement lorsque l'on considère les applications (quasi-)stables vers des champs : les courbes schématiques ne suffisent plus à obtenir un champ de modules propres. Pour garantir la propreté, il faut autoriser les courbes sources à développer elles-mêmes des structures champêtres.

### 1.2 Invariants de Gromov–Witten champêtres

**Définition** (Courbe champêtre (ou tordue)). *Une courbe champêtre à $n$ marquages (sur une base $B$) est un champ de Deligne–Mumford plat, propre et quasi-lisse $C \to B$ de dimension $1$ munie de sous-$B$-champs $\Sigma_i \hookrightarrow C_{\text{rég}}$ tel que*

— *les $\Sigma_i \to B$ sont des gerbes finies étales,* i.e. *localement (sur $B$) de la forme $\mathcal{B}\mu_{r_i}$ pour des entiers $r_i$,*

— *l'espace de modules grossier $(|C|; |\Sigma_1| \simeq *, \ldots, |\Sigma_n| \simeq *)$ est une courbe préstable à $n$ points marqués, et $C$ lui est équivalent en dehors des points spéciaux,*

— *les nodes sont (localement sur $B$) de la forme $[\mathrm{Spec}(\Bbbk[s,t]/(st))/\mathcal{B}\mu_r]$ où $\mu_r$ agit de façon équilibrée sur les deux branches.*

On notera $\mathfrak{C}_{0,n,(r_1,\ldots,r_n)} \to \mathfrak{M}_{0,n,(r_1,\ldots,r_n)}$ le champ de modules des courbes champêtres dont les gerbes marquées sont d'ordres $r_1, \ldots, r_n$ et sa courbe champêtre universelle.

**Théorème** (Kontsevich–Manin, Behrend–Manin, Abramovich–Graver–Vistoli, Cheong–Ciocan-Fontanine–Kim–Maulik). *Soit $(X, \mathcal{L} = \varepsilon\mathcal{L}_0)$ un champ d'Artin rationnellement polarisé et quasi-lisse dont le lieu stable est une orbifolde* (i.e. *lisse et de Deligne–Mumford*)*. Le champ $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$ des applications quasi-$\mathcal{L}$-stables vers $X$ est un champ de Deligne–Mumford propre muni d'une théorie d'obstruction $[-1,0]$-parfaite $E \to \mathbb{L}_{\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)}$, induisant une classe virtuelle $\left[\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)}\right] \in G_0(\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta))$.*

Cette classe virtuelle permet de définir une bonne « image directe virtuelle »

$$\mathrm{Stab}^{\mathrm{vir}}_* = \mathrm{Stab}_* \circ \left(\left[\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)}\right] \otimes -\right) : G_0\big(\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)\big) \to G_0\big(\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)\big) \to G_0\big(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\big)$$

le long du morphisme d'oubli de l'application quasistable et stabilisation de la courbe. Cependant, une conséquence de l'utilisation des courbes champêtres est qu'il n'y a plus d'applications d'évaluation aux points marqués $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta) \to X$.

En effet, les marquages $\Sigma_i$ d'une courbe champêtre $C$ ne sont plus des points mais des gerbes, et donc la restriction de $f \colon C \to X$ à l'un d'eux n'est plus un point de $X$ mais un morphisme d'une gerbe vers $X$. Le champ dont les points sont ces objets est le **champ d'inertie cyclotomique rigidifié**

$$\overline{\mathscr{I}}_\mu X \coloneqq \coprod_{r>0} \left[\mathcal{M}or^{\mathrm{repr}}(\mathcal{B}\mu_r, X)/\mathcal{B}\mu_r\right],$$

et l'on a donc des morphismes

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n+1}(X,\beta) \arrow[dl, "{(\mathrm{Stab},\mathrm{ev}_1,\dots,\mathrm{ev}_n)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{n+1}"] & \\
\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \times (\overline{\mathcal{I}}_\mu X)^n & & \overline{\mathcal{I}}_\mu X,
\end{tikzcd}$$

qui induisent en G-théorie

$$G_0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}) \otimes G_0(\overline{\mathcal{I}}_\mu X)^{\otimes n} \xleftarrow{\mathrm{Stab}^{\mathrm{vir}}_*} G_0(\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n+1}(X,\beta)) \xleftarrow{\mathrm{ev}^*_{n+1}} G_0(\overline{\mathcal{I}}_\mu X).$$

# 2 Catégorification des invariants de quasi-applications

## 2.1 Champs de modules dérivés

On peut interpréter le morphisme obtenu comme (dual d')une action de la famille de groupes $G_0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1})$ sur $G_0(\overline{\mathcal{I}}_\mu X)$. Pour cela, on utilise le fait que ces groupes s'assemblent en une structure d'opérade (modulaire), qui existe en fait déjà au niveau géométrique sur la famille de champs $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$. Nous allons nous restreindre au cas du genre $0$ pour simplifier le propos.

On interprète une courbe à $n+1$ points marqués comme une opération $n$-aire, dont les entrées sont les $n$ premiers points marqués et la sortie le dernier ; on pose ainsi $\mathcal{M}_0(n) = \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$. L'opération de composition opéradique est fournie par le recollement de courbes le long d'un point marqué (formant un node).

**Proposition** (Kontsevich–Manin, Abramovich–Graber–Vistoli)**.** *Les invariants de quasi-applications de genre $0$ exhibent une structure de $G_0(\mathcal{M}_0)$-algèbre sur $G_0\overline{\mathcal{I}}_\mu X$.*

La construction peut en fait être adaptée *mutatis mutandis* à toute théorie motivique.

*Question.* La structure de $G_0(\mathcal{M}_0)$-algèbre sur $G_0(\overline{\mathcal{I}}_\mu X)$ peut-elle se dé-décatégorifier à une structure de $\mathfrak{Coh}^b(\mathcal{M}_0)$-algèbre sur $\mathfrak{Coh}^b(\overline{\mathcal{I}}_\mu X)$, voire même se relever au niveau géométrique ?

Le problème est dans la classe virtuelle, qui existe uniquement en tant que classe motivique mais pas comme véritable objet géométrique sur $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$.

La solution va alors être de remplacer $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$ par un autre type d'espace, qui connaîtra toute l'information donnant la classe virtuelle. Celle-ci étant construite à partir de la donnée supplémentaire d'une théorie d'obstruction parfaite, ce type d'espace doit être adapté au contexte cohomologique de la théorie de la déformation : il s'agira donc d'un champ dérivé.

**Lemme** (Schürg–Toën–Vezzosi)**.** *Soient $M$ un champ dérivé et $U \subset t_0 M$ un ouvert de Zariski de son tronqué. Il existe un unique sous-champ dérivé ouvert de Zariski $\widetilde{U} \subset M$ tel que $t_0\widetilde{U} = U$ (et en fait $U = \widetilde{U} \times_M t_0 M$).*

En remarquant que $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$ est un ouvert de $\mathcal{M}or_{/\mathfrak{M}_{0,n}}(\mathfrak{C}_{0,n}, X\times\mathfrak{M}_{0,n})$, on en obtient donc un épaississement dérivé

$$\mathbb{R}\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta) \subset \mathbb{R}\,\mathcal{M}or_{/\mathfrak{M}_{0,n}}(\mathfrak{C}_{0,n}, X\times\mathfrak{M}_{0,n}).$$

**Proposition** (Schürg–Toën–Vezzosi, Mann–Robalo)**.** *Dans les hypothèses du théorème plus haut* ($X$ *est* 1*-Artin quasi-lisse de lieu* $\mathcal{L}$*-stable orbifold*)*, le champ dérivé* $\mathbb{R}\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$ *est quasi-lisse ; son complexe cotangeant induit donc une théorie d'obstruction parfaite sur* $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$*, qui coïncide avec celle étudiée classiquement.*

*En outre, en notant* $\jmath\colon \overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta) \hookrightarrow \mathbb{R}\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$ *l'immersion fermée canonique, qui par le théorème du cœur induit un isomorphisme en* $G_0$*-théorie, on a*

$$\left[\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)}\right] = {\jmath_*}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)}.$$

Ainsi le champ dérivé $\mathbb{R}\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$ encode bien la géométrie virtuelle de $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n}(X,\beta)$, et les correspondances

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}\overline{\mathcal{Q}}^{\mathcal{L}}_{g,n+1}(X,\beta) \arrow[dl, "(\mathrm{Stab},\mathrm{ev}_1,\dots,\mathrm{ev}_n)"'] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{n+1}"] & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}\times(\overline{\mathscr{I}}_{\mu}X)^n & & \overline{\mathscr{I}}_{\mu}X, \end{tikzcd}$$

doivent contenir toute l'information des invariants de Gromov–Witten et la théorie cohomologique des champs qu'ils induisent. La question restante est d'exhiber la structure de $\mathcal{M}_0$-algèbre sur la famille de ces correspondances.

Elle va venir, au travers du phénomène d'action de membrane, d'une autre opérade de champs de modules de courbes.

## 2.2 Action de Gromov–Witten

*Construction.* Rappelons que $\mathfrak{M}_{0,n,(r_1,\cdots,r_n)}$ est le champ de modules des courbes champêtre de genre $g$ à $n$ marquages de gerbes d'isotropie d'ordres $r_1,\cdots,r_n$. Si $C\in\mathfrak{M}_{0,n+1,(r_1,\cdots,r_{n+1})}(\Bbbk)$ et $C'\in\mathfrak{M}_{0,m+1,(s_1,\cdots,s_{m+1})}(\Bbbk)$ est une autre courbe champêtre, avec $s_i = r_{n+1}$, on peut les recoller le long des gerbes d'ordre commun. Cela forme un node, et pour qu'il soit équilibré, il faut que les liens des deux gerbes originales soient inverses l'un de l'autre. On l'écrit (pour nous, en genre 0) comme une application

$$\mathfrak{M}_{0,n+1,(r_1,\cdots,r_{n+1})}\underset{\mathcal{B}^2\mu_{r_{n+1}}}{\times}\mathfrak{M}_{0,m+1,(s_1,\cdots,s_{m+1})}\to\mathfrak{M}_{0,n+m,(s_1,\dots,s_{i-1},r_1,\dots,r_n,s_{i+1},\dots,s_m,s_{m+1})}$$

que l'on voit donc comme la composition d'une opérade colorée dans les champs, notée $\mathfrak{M}_0$. Il ne s'agit pas d'une opérade enrichie dans les champs mais d'une opérade *interne* aux champs, puisque ses couleurs sont données par le 2-champ $\mathcal{B}^2\mu \coloneqq \coprod_{r\geq 1}\mathcal{B}^2\mu_r$.

En particulier, pour tout $r > 1$, la couleur $r$ a un groupe d'automorphismes égal à $\mathcal{B}\mu_r$ et n'est donc pas unitale. La couleur 1 se distingue, et fait de $\mathfrak{M}_0$ une opérade hapaxunitale : elle a une couleur distinguée unitale.

Pour parler d'algèbres (en correspondances) sur les opérades de champs de modules de courbes, il nous faut aussi définir la cible (rappelons que, si $\mathcal{V}^{\otimes}$ est une $\infty$-catégorie monoïdale symétrique et $\mathcal{O}$ une $\infty$-opérade, une $\mathcal{O}$-algèbre dans $\mathcal{V}^{\otimes}$ est un morphisme d'opérades $\mathcal{O} \to \mathcal{V}^{\otimes}$). Pour tout $\infty$-topos $\mathfrak{T}$, le faisceau $\mathfrak{T}_{/-}$ est son univers, qui classifie les structures internes à $\mathfrak{T}$. Pour définir des morphismes vers $\mathfrak{T}_{/-}$, on peut utiliser le lemme de Yoneda, ou simplement parler dans le langage interne de $\mathfrak{T}$.

**Théorème** (Toën, Mann–Robalo, K.). *Soit $\mathcal{O}$ une $\infty$-opérade hapaxunitale, de couleur distinguée $C_0$, dans un $\infty$-topos $\mathfrak{T}$. Il existe un morphisme laxe d'$\infty$-opérades catégoriques de $\mathfrak{T}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{O}} \colon \mathcal{O} &\to \mathcal{C}ocorr(\mathfrak{T}_{/-})^{\amalg} \\ O &\mapsto \mathcal{O}(O, C_0; O) \underset{\mathcal{O}(O;O)}{\times} \{\mathbb{1}_O\}. \end{aligned}$$

*En composant, pour tout objet $X \in \mathfrak{T}$, avec le hom interne $\mathcal{M}or_{\mathfrak{T}}(-, X)$ (qui est monoïdal $\mathfrak{T}^{\amalg} \to \mathfrak{T}^{\times}$), cela induit un morphisme laxe*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^X_{\mathcal{O}} \colon \mathcal{O} &\to \mathcal{C}orr(\mathfrak{T}_{/-})^{\times} \\ O &\mapsto \mathcal{M}or_{\mathfrak{T}}\Big(\mathcal{O}(O, C_0; O) \underset{\mathcal{O}(O;O)}{\times} \{\mathbb{1}_O\}, X\Big). \end{aligned}$$

**Corollaire** (Mann–Robalo, K.). *Il existe un morphisme laxe d'$\infty$-opérades catégoriques dans $\mathfrak{ChDer}$*

$$\begin{aligned} \mathscr{GW}^{(X,\mathcal{L})} \colon \mathcal{M}_0 &\to \mathcal{C}orr(\mathfrak{ChDer}_{/-})^{\times} \\ * &\mapsto \overline{\mathscr{L}}_{\mu} X \coloneqq \coprod_{r>0} \big[\mathbb{R}\, \mathcal{M}or^{\mathrm{repr}}(\mathcal{B}\mu_r, X)/\mathcal{B}\mu_r\big] \end{aligned}$$

*Démonstration.* Le morphisme $\mathscr{GW}^{(X,\mathcal{L})}$ est obtenu comme extension oplaxe (interne à $\mathfrak{T}$) de l'action de membranes pour l'opérade $\mathfrak{M}_0$ le long du morphisme de stabilisation $\mathfrak{M}_0 \to \mathcal{M}_0$ :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Stab}"'] & \mathcal{C}orr(\mathfrak{ChDer}_{/-})^{\times} \\ \mathcal{M}_0 \arrow[ur, dashed, "\mathscr{GW}^{(X,\mathcal{L})}"'] & \end{tikzcd}$$

Les extensions oplaxes sont calculées (l'opérade $\mathcal{M}_0$ n'ayant qu'une couleur) par la formule

$$\mathscr{GW}^{(X,\mathcal{L})}(*) = \varinjlim_{\mathrm{Stab}(r) \in \mathcal{B}^2\mu \downarrow \{*\}} \mathcal{B}^X_{\mathfrak{M}_0}(r).$$

Or l'on sait que

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{M}_0}(r) \simeq \mathfrak{M}_{0,3,(r,1,r)} \underset{\mathfrak{M}_{0,2,(r,r)}}{\times} \{\mathbb{1}_r\} \simeq * \underset{\mathfrak{M}_{0,2,(r,r)}}{\times} * = \Omega\mathcal{B}^2\mu_r \simeq \mathcal{B}\mu_r$$

d'où $\mathfrak{B}^X_{\mathfrak{M}_0}(r) = \mathbb{R}\,\mathcal{M}or(\mathcal{B}\mu_r, X)$ et l'on décompose la colimite comme

$$\varinjlim_{\coprod_{r\geq 1} \mathcal{B}^2\mu_r} \mathbb{R}\,\mathcal{M}or(\mathcal{B}\mu_r, X) \simeq \coprod_{r\geq 1} \varinjlim_{\mathcal{B}\mathcal{B}\mu_r} \mathbb{R}\,\mathcal{M}or(\mathcal{B}\mu_r, X) \simeq \coprod_{r\geq 1} \mathbb{R}\,\mathcal{M}or(\mathcal{B}\mu_r, X)/\mathcal{B}\mu_r.$$

$\square$