Reconstruction de Tannaka pour les champs dérivés

David KERN

19 avril 2019

0 Du formalisme galoisien au formalisme tannakien : la schématisation des types d'homotopie

0.1 La forme d'un ∞-topos

Les ∞-groupoïdes s'envoient dans les ∞-topoï par l'∞-foncteur appliquant un ∞-groupoïde X sur l'∞-topos $\infty - \mathfrak{Grpd}_{/X}$, qui est équivalent à $\mathfrak{PrFaisc}(X)$. Cet ∞-foncteur s'étend aux pro-objets dans les ∞-groupoïdes, et l'∞-foncteur résultant admet un adjoint à gauche $\mathfrak{Top} \to \mathrm{Pro}(\infty - \mathfrak{Grpd})$, appelé $\mathscr{Forme}$. Rappelons que, d'après [HTT], l'∞-catégorie des pro-objets d'une ∞-catégorie $\mathfrak{C}$ admettant les petites limites coïncide avec $\mathfrak{Fonc}^{\mathrm{lim,access}}(\mathfrak{C}, \infty - \mathfrak{Grpd})^{\mathrm{op}}$. En tant qu'$\infty$-foncteur $\infty - \mathfrak{Grpd} \to \infty - \mathfrak{Grpd}$, $\mathscr{Forme}(\mathfrak{T})$ (pour tout ∞-topos $\mathfrak{T}$) applique donc un ∞-groupoïde X sur

$$\mathscr{Forme}(\mathfrak{T})(X) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{Fonc}(\mathfrak{C},\infty-\mathfrak{Grpd})^{\mathrm{op}}}(X, \mathscr{Forme}(\mathfrak{T})) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{Top}}(\mathfrak{T}, \mathfrak{PrFaisc}(X)) \qquad (1)$$

(ce qui définit bien un ∞-foncteur accessible).

Soit $\mathfrak{T}$ un ∞-topos, et soit $j\colon \mathfrak{T} \to \infty - \mathfrak{Grpd}$ son morphisme géométrique structural, dont l'∞-foncteur d'image directe est noté $j_* =: \Gamma \in \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{T}, \infty - \mathfrak{Grpd})$, interprété comme les sections globales, et son adjoint à gauche d'image inverse est $j^* =: \Delta \in \mathfrak{Fonc}(\infty - \mathfrak{Grpd}, \mathfrak{T})$, interprété comme associant à un ∞-groupoïde son faisceau constant. Rappelons que $\mathfrak{T}$ est dit localement ∞-connexe si j est un morphisme géométrique essentiel, c'est-à-dire que Δ admet en outre un adjoint à gauche $j_! = \Pi$. De manière générale, Δ admet un pro-adjoint à gauche $j_! = \Pi \in \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{T}, \mathrm{Pro}(\infty - \mathfrak{Grpd}))$ défini par $\Pi(T)(X) = \mathrm{Map}(\Pi(T), X) = \mathrm{Map}(T, \Delta(X))$ pour tous $T \in \mathfrak{T}$ et $X \in \infty - \mathfrak{Grpd}$. On a alors $\mathscr{Forme}(\mathfrak{T}) = \Pi(1)$, où 1 est l'objet final de $\mathfrak{T}$. Plus précisément cela veut dire que pour tout ∞-groupoïde X on a

$$\mathscr{Forme}(\mathfrak{T})(X) = \mathrm{Map}(1, \Delta(X)) = \mathrm{Map}(\Delta(*), \Delta(X)) = \mathrm{Map}(*, \Gamma\Delta(X)) = \Gamma\Delta(X); \qquad (2)$$

ainsi $\mathscr{Forme}(\mathfrak{T}) = \Gamma \circ \Delta$.

0.2 Homotopie galoisienne et linéarisation des coefficients

Un système local sur $T \in \mathfrak{T}$ est un morphisme $T \to \Delta(i_0(\infty - \mathfrak{Grpd}))$ dans $\mathfrak{T}$ (où $i_0(\infty - \mathfrak{Grpd})$ désigne l'∞-groupoïde maximal de l'∞-catégorie $\infty - \mathfrak{Grpd}$). Remarquons que, par composition avec la projection $\mathfrak{T}_{/T} \to \mathfrak{T}$, on a $\Pi(T) = \mathscr{Forme}(\mathfrak{T}_{/T})$. Il nous suffit donc de nous intéresser aux systèmes locaux sur 1, dont l'∞-topos est $\mathfrak{T}^{1/}_{/\Delta(i_0(\infty-\mathfrak{Grpd}))}$. On a une équivalence d'∞-topoï avec $\mathfrak{PrFaisc}(\mathscr{Forme}(\mathfrak{T}))$.

Soit $x\colon * \to \mathscr{Forme}(\mathfrak{T})$ un point ; il induit l'∞-foncteur fibre

$$\mathscr{fib}_x = x^*\colon \mathfrak{Loc}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{PrFaisc}(\mathscr{Forme}(\mathfrak{T})) \to \mathfrak{PrFaisc}(*) = \infty - \mathfrak{Grpd}. \quad (3)$$

Par le lemme de pro-Yoneda, on a une équivalence de pro-∞-groupes $\mathrm{Aut}(\mathscr{fib}_x) \simeq \mathrm{Map}_{\mathscr{Forme}(\mathfrak{T})}(x, x) =: \Omega_x \mathscr{Forme}(\mathfrak{T})$. Les automorphismes du foncteur fibre recouvrent bien l'homotopie de $\mathfrak{T}$ pointé en x.

Soit $\mathfrak{C}$ une ∞-catégorie définissant un contexte algebro-géométrique homotopique au sens de [HAG2] et A une $\mathcal{E}_\infty$-algèbre dans $\mathfrak{C}$. On va s'intéresser aux systèmes locaux de A-modules, c'est-à-dire à valeurs dans l'∞-catégorie des complexes parfaits sur $\mathrm{Spec}\, A$. Nous allons chercher à interpréter l'∞-groupe d'automorphismes du foncteur fibre correspondant comme l'homotopie de la schématisation de $\mathscr{Forme}(\mathfrak{T})$ sur le site des A-champs.

1 Gerbes algébriques

1.1 Gerbes supérieures liées

Soit $\mathfrak{T}$ un ∞-topos. Une n**-gerbe** de $\mathfrak{T}$, pour $n \geq 0$, est un objet $(n-1)$-connexe (ou n-connectif) et n-tronqué. Rappelons que pour tout objet T, un objet de l'∞-topos $\mathfrak{T}_{/T}$ est appelé un faisceau sur $\mathfrak{T}$; on appellera donc **gerbe sur** T une gerbe dans $\mathfrak{T}_{/T}$. Soit $\mathfrak{Gerb}_n(\mathfrak{T})$ la sous-∞-catégorie 2-pleine de $\mathfrak{T}^{[1]}$ dont les objets sont les morphismes de $\mathfrak{T}$ exhibant leur source comme une n-gerbe sur leur cible, et les flèches sont les carrés cohérents qui sont cartésiens.

Un **objet d'Eilenberg–MacLane de degré** n est une n-gerbe pointée. On dénote $\mathfrak{EM}_n(\mathfrak{T})$ la sous-∞-catégorie pleine de $\mathfrak{T}^{1/}$ sur les objets d'Eilenberg–MacLane de degré n.

Propostion 1 ([HTT, Lemma 7.2.2.11])**.** *Notons $\mathscr{W}\colon \mathfrak{T}^{[1]} \to \mathfrak{T}^{\Delta_a} \to \mathfrak{T}^{\Delta}$ l'∞-foncteur qui associe à une flèche de $\mathfrak{T}$ l'∞-groupoïde sous-jacent de son noyau supérieur (nerf de Čech).*

1. *La restriction de $\mathscr{W}$ aux objets pointés connexes induit une équivalence avec l'∞-catégorie des groupes de $\mathfrak{T}$.*
2. *L'image essentielle de $\mathscr{W}|_{\mathfrak{EM}_n(\mathfrak{T})}$ coïncide avec celle de $\mathscr{B}\colon \mathfrak{Grp}(\mathfrak{EM}_{n-1}(\mathfrak{T})) \hookrightarrow \mathfrak{Grp}(\mathfrak{T}^{1/}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Grp}(\mathfrak{T})$.*

Lemme 2 ([HTT, Proposition 7.2.2.12])**.**
1. *La restriction à $\mathfrak{EM}_0(\mathfrak{T})$ de l'∞-foncteur π_0 induit une équivalence avec la catégorie $\tau_{\leq 0}(\mathfrak{T})^{1/}$.*
2. *La restriction à $\mathfrak{EM}_1(\mathfrak{T})$ de π_1 induit une équivalence avec la catégorie $\mathfrak{Grp}(\tau_{\leq 0}\mathfrak{T})$.*

3. *Pour tout $n \geq 2$, la restriction de π_n à $\mathfrak{EM}_n(\mathfrak{T})$ induit une équivalence avec l'abélianisée $\mathfrak{AbGrp}(\tau_{\leq 0}\mathfrak{T})$.*

Ainsi l'∞-foncteur $\pi_n|_{\mathfrak{EM}_n(\mathfrak{T})}$ admet un inverse $K(-,n)$. On appelle $\mathbf{B} \coloneqq K(-,1)$ l'∞-foncteur d'**objets classifiants** des groupes de $\tau_{\leq 0}\mathfrak{T}$.

Bien que les n-gerbes générales n'admettent pas de point base, la connexité implique qu'elles peuvent toujours être pointées *localement*. Ainsi toute gerbe devrait pouvoir être reconstruite en recollant des groupes (abéliens pour $n \geq 2$).

Construction 3 (Lien d'une gerbe). **Si** $n \geq 2$ **:** Soit $p \colon \mathfrak{T}_{/G} \to \mathfrak{T}$ le morphisme géométrique de projection, et p^* son ∞-foncteur d'image inverse. Par [HTT, Lemma 7.2.1.13], f^* induit un ∞-foncteur pleinement fidèle $\tau_{\leq n-1}\mathfrak{T} \to \tau_{\leq n-1}\mathfrak{T}_{/G}$, se restreignant à une équivalence $\tau_{\leq n-2}\mathfrak{T} \simeq \tau_{\leq n-2}\mathfrak{T}_{/G}$. Ainsi, $\pi_n G \in \tau_{\leq 0}\mathfrak{T}_{/G} \subset \tau_{\leq n-2}\mathfrak{T}_{/G}$ est isomorphe à l'image d'un groupe abélien de $\tau_{\leq 0}\mathfrak{T}$ par p^*. Ce groupe abélien est appelé le lien de G.

Si $n = 1$ **:** On a seulement un ∞-foncteur pleinement fidèle $\tau_{\leq 0}\mathfrak{T} \to \tau_{\leq 0}\mathfrak{T}_{/G}$. Mais G est 1-tronquée donc $\mathfrak{T}_{/G} \simeq \tau_{\leq 1}\mathfrak{T}_{/G}$, et l'on peut supposer que $\mathfrak{T}$ est un 2-topos. Soit $\mathfrak{S}$ un (2-)site de définition. Le champ des liens de $\mathfrak{S}$ est le champ associé au pseudo-foncteur (qui est en fait un préchamp) associant à tout $S \in \mathfrak{S}$ la catégorie dont les objets sont les faisceaux de groupes sur $\mathfrak{S}_{/S}$ et l'ensemble des morphismes $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est les sections globales du faisceau quotient de $\mathscr{H}\!om(\mathscr{A},\mathscr{B})$ par les actions de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ à droite et à gauche par automorphismes intérieures. Un lien sur $\mathfrak{S}$ est une section cartésienne de ce champ.

Il existe un foncteur $\mathscr{lien}$ de la catégorie des faisceaux de groupes vers celle des liens, et un lien est dit représentable s'il est dans l'image essentielle de ce foncteur. De même un morphisme de liens f est dit représentable si sa source et son but le sont (avec un choix d'isomorphismes, et un relèvement de f aux représentants) et s'il commute aux isomorphismes de représentation. Tout morphisme de liens (et, *a fortiori*, tout lien) est représentable. Tout lien localement représentable par un faisceau de groupes abéliens l'est globalement.

Pour tout champ $\mathfrak{F}$, que l'on présente comme une catégorie fibrée sur $\mathfrak{S}$, alors sa sous-catégorie $\mathfrak{F}^{\mathrm{cart}}$ constituée des flèches cartésiennes admet un foncteur cartésien vers le champ des faisceaux de groupes (associant à tout objet son faisceau d'automorphismes), que l'on peut composer avec $\mathscr{lien}$ pour obtenir un morphisme de champs de $\mathfrak{F}$ dans le champ des liens. On dit qu'un lien $\mathscr{L}$ opère sur le champ $\mathfrak{F}$ si l'on se donne une transformation de morphismes de champs

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}^{\mathrm{cart}} \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathfrak{Lien}(\mathfrak{S}) \\ & \mathfrak{S} \arrow[ur, "\mathscr{L}"'] & \end{tikzcd} \quad . \tag{4}$$

Par [Giraud, Proposition IV.2.2.1], si $\mathfrak{F}$ est une gerbe il existe un lien opérant par un isomorphisme (ce qui équivaut à ce qu'il soit terminal parmi les liens opérant sur $\mathfrak{F}$). On appelle ce lien (déterminé à isomorphisme unique près) le lien de $\mathfrak{F}$.

Si $n = 0$ **:** Une 0-gerbe est la même chose qu'un faisceau de groupes (que l'on définit donc comme le lien).

Corollaire 4. *Un objet de $\mathfrak{T}$ est une n-gerbe si et seulement si il est localement de la forme* $K(G, n)$.

1.2 Spectres d'algèbres de Hopf

Soit $\mathfrak{C}$ une ∞-catégorie et τ une topologie sous-canonique sur $\mathfrak{Aff}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{C})^{op}$ définissant un contexte algébro-géométrique homotopique.

Définition 5 (Algèbre de Hopf)**.** *Une **$\mathfrak{C}$-algèbre de Hopf** est un objet en cogroupes dans $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{C})$. L'$\infty$-catégorie des algèbres de Hopf est la sous-∞-catégorie des $\mathcal{A}_\infty$-cogèbres (ou comonoïdes) dans $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{C})$ sur les cogèbres munies d'un morphisme dit d'**antipode** réalisant la structure de groupe.*

Remarque 6. L'∞-foncteur Spec: $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{C}) \to \mathfrak{Aff}_{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{Faisc}_\tau(\mathfrak{Aff}_{\mathfrak{C}})$ envoie les algèbres de Hopf sur des champs en groupes (bien sûr affines).

Définition 7 (Algèbres de type fini)**.** *Soit S un objet initial de $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{C})$. Une $\mathcal{E}_\infty$-algèbre A est dite **de type fini** si son morphisme structural* $\mathrm{Spec}\, A \to 1 = \mathrm{Spec}\, S$ *est τ-couvrant.*

Définition 8 (Gerbes algébriques et affines)**.** *Une **gerbe affine** (resp. algébrique) sur $\mathfrak{C}$ est une 1-gerbe de $\mathfrak{Faisc}_\tau(\mathfrak{Aff}_{\mathfrak{C}})$ dont le lien est un champ en groupes affine (resp. de type fini).*

Remarque 9. Une gerbe affine pointée est donc un champ de la forme $\mathbf{B}G$ pour G un champ en groupes affine discret (*i.e.* $\mathbf{B}\,\mathrm{Spec}\, R$ pour R une algèbre de Hopf).

Construction 10. L'∞-catégorie d'opérateurs d'une ∞-catégorie monoïdale (non-nécessairement symmétrique) est en particulier un objet de Segal dont l'∞-catégorie d'objets est un ∞-groupoïde discret et contractile : cette observation définit donc un ∞-foncteur $\mathbf{B}\colon \infty - \mathfrak{CatMon} \to (\infty, 2) - \mathfrak{Cat}^{*/}$ se factorisant par la sous-∞-catégorie pleine $(\infty, 2) - \mathfrak{Cat}^{1\ \mathrm{obj}}$ des $(\infty, 2)$-catégories à un objet (et pointées par icelui).

Cet ∞-foncteur admet un adjoint à droite $\Omega\colon (\infty, 2) - \mathfrak{Cat}^{*/} \to \infty - \mathfrak{CatMon}$ appliquant une $(\infty, 2)$-catégorie pointée $C\colon * \to \mathfrak{C}$ sur l'∞-catégorie monoïdale $\Omega_C\mathfrak{C}$ des endomorphismes de l'objet C, et l'adjonction induit une équivalence par restriction à $(\infty, 2) - \mathfrak{Cat}^{1\ \mathrm{obj}}$. Une restriction supplémentaire aux $(\infty, 1)$-catégories (à un objet) induit une équivalence avec les ∞-monoïdes (puisque $\infty - \mathfrak{CatMon} \simeq \mathfrak{Alg}_{\mathcal{A}_\infty}(\infty - \mathrm{Cat})$).

Cette construction passe aux champs d'∞-catégories monoïdales, en l'appliquant objet par objet puis faisceautisant, et la restriction de $\mathbf{B}$ aux ∞-groupes discrets recouvre l'∞-foncteur $\mathbf{B} = K(-, 1)$.

1.3 Gerbes généralisées

Nous allons également nous intéresser à une classe plus générale de gerbes, qui ne sont pas tronquées.

Définition 11 (Gerbe généralisée)**.** *Une **gerbe généralisée** est un champ connexe.*

Lemme 12. *Un champ est une gerbe généralisée si et seulement si il est localement non vide et localement connexe.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un champ ; le faisceau (d'ensembles) $\pi_0\mathscr{F}$ est le faisceautisé de $U \mapsto \pi_0(\mathscr{F}(U))$. Ainsi une section de $(\pi_0\mathscr{F})(1)$ sera donnée donnée par une classe d'équivalence de sections de $\mathscr{F}$ sur un système de recouvrements de 1. La condition de connexité indique que $\pi_0\mathscr{F}$ doit être isomorphe au faisceautisé de $U \mapsto *$; ainsi il existe bien un morphisme couvrant $U \to 1$ et une section dans $\mathscr{F}(U)$, ce qui est la définition de la non-vacuité locale. La connexité locale est évidente. □

Propostion 13 (*cf.* [Wal11, Proposition 4.2.4])**.** *Un champ est une gerbe généralisée si et seulement si il est localement de la forme* $\mathbf{B}G$ *où* G *est un champ en groupes.*

Démonstration. Soit $\mathscr{G}$ une gerbe généralisée. Soit $\varpi\colon U \to 1$ un τ-recouvrement avec $s \in \mathscr{G}(U)$. On a une équivalence $\mathscr{G}|_U \coloneqq \varpi^*\mathscr{G} \simeq \mathbf{B}\mathscr{A}ut_U(s)$, puisque s pointe $\mathscr{G}|_U$. □

On peut voir une gerbe généralisée comme une 1-gerbe augmentée par un certain champ 1-connexe. Cette description peut être rendue précise dans le cas où $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{C})$ est l'∞-catégorie des spectres en $\Sigma^\infty\kappa$-algèbres $\mathcal{E}_\infty$ connectifs, pour κ un corps de caractéristique 0.

Construction 14 (Cospectre). Soit $\imath\colon \mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{Sp}^{cn})^{\Sigma^\infty\kappa/} \hookrightarrow \mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{Sp})^{\Sigma^\infty\kappa/}$ l'inclusion des κ-algèbres spectrales connectives dans les κ-algèbres spectrales. On définit l'∞-foncteur $\mathrm{coSpec}\colon (\mathfrak{Alg}_{\mathscr{E}_\infty}(\mathfrak{Sp})^{\Sigma^\infty\kappa/})^{op} \to \mathfrak{Fonc}(\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_\infty}(\mathfrak{Sp}^{cn})^{\Sigma^\infty\kappa/}, \infty-\mathfrak{Grpd})$ comme la restriction du plongement de co-Yoneda selon $\imath$, c'est-à-dire que pour toute κ-algèbre spectrale A l'∞-foncteur $\mathrm{coSpec}\,A$ applique une κ-algèbre spectrale connective B sur $\hom(A, B)$.

Par le lemme de Yoneda, la restriction de coSpec aux algèbres connectives est pleinement fidèle. En outre, par [DAG8, Theorem 4.4.1], sa restriction aux algèbres coconnectives est également un plongement.

Définition 15 (Champ coaffine)**.** *Un champ coaffine sur* κ *est un champ spectral équivalent au cospectre d'une* κ*-algèbre spectrale coconnective.*

Exemple 16 (Champs classifiants). Soit $\mathscr{X}$ un κ-champ algébrique spectral et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module quasicohérent coconnectif. Alors $\mathbb{V}(\mathscr{M}) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}(\mathscr{M}^\vee)$ est (relativement) coaffine. En particulier on a $K(\mathbb{G}_a, n) = \mathrm{coSpec}(\mathrm{Sym}\,\Sigma^{\infty-n}\kappa)$ (où $\Sigma^{\infty-n}\kappa = \Omega^n\Sigma^\infty\kappa$, soit $\pi_{-n}(\Sigma^{\infty-n}\kappa) = \kappa$).

Propostion 17 ([DAG8, Proposition 4.4.6])**.** *Un champ dérivé coaffine est l'extension de Kan gauche de sa restriction à la catégorie des* k*-algèbres discrètes.*

Propostion 18 ([Toë06, Corollaire 2.4.10],[DAG8, Proposition 4.4.8])**.** *Un* k*-champ dérivé connexe est coaffine si et seulement si ses faisceaux d'homotopie sont des schémas en groupes affines unipotent (où* G *est unipotent si toute représentation linéaire non-nulle* V *vérifie* $V^G \neq 0$*, si et seulement si tout sous-schéma en groupes fermé admet un homomorphisme vers* $\mathbb{G}_a$*).*

Si $\mathscr{X}$ est une gerbe généralisée, il existe une 1-gerbe $\mathscr{G}$ et un morphisme $\mathscr{X} \to \mathscr{G}$, ainsi qu'un point $\operatorname{Spec} \kappa' \to \mathscr{G}$ en lequel la fibre $\mathscr{X}_0$ de $\mathscr{X} \to \mathscr{G}$ est un champ coaffine (c'est-à-dire que $\mathscr{X}$ est une gerbe algébrique généralisée au sens de [DAG8, Definition 5.2.1]). En outre, par [DAG8, Remark 5.2.3], le morphisme $\mathscr{X}_0 \to \mathscr{X}$ est un épimorphisme effectif, c'est-à-dire que l'objet de codescente de son noyau supérieur (*i.e.* la réalisation géométrique de son nerf de Čech) est $\mathscr{X}$.

2 Le champ des fibres d'une ∞-catégorie Tannakienne

À partir de maintenant, nous travaillerons dans le contexte géométrique de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (fpqc) sur l'∞-catégorie des k-algèbres, pour k un spectre en anneaux $\mathcal{E}_\infty$ fixé.

Remarque 19. La topologie fpqc est bien adaptée à ce type de théorèmes de reconstruction, puisque d'après [SAG, Proposition 6.2.3.1], pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Alg}_{\mathrm{k}}$, le morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ vers son faisceautisé fpqc induit une équivalence d'∞-catégories $\mathfrak{QCoh}(\mathscr{F}^+) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{QCoh}(\mathscr{F})$.

2.1 Catégories Tannakiennes neutres

Définition 20 (Module parfait)**.** *Soit $\mathscr{X}$ un k-champ. L'∞-catégorie $\mathfrak{Parf}(\mathscr{X})$ des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules parfaits est la sous-∞-catégorie pleine de $\mathfrak{QCoh}(\mathscr{X})$ sur les objets compacts (ou, de façon équivalente, dualisable pour le produit tensoriel).*

Comme toujours, si $\mathscr{X} = \operatorname{Spec} A$ est affine, on écrira $\mathfrak{Parf}(A) := \mathfrak{Parf}(\mathscr{X})$.

Si $\mathscr{X}$ est discret, un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module parfait est localement équivalent à un complexe borné de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules de type fini.

Propostion 21. *$\mathfrak{Parf}(\mathscr{X})$ est un monoïde dans l'$(\infty, 2)$-catégorie symmétrique monoïdale $\infty - \mathfrak{Cat}^{\mathrm{st,pr}}$.*

Définition 22 (∞-Catégorie k-linéaire)**.** *Une **∞-catégorie k-tensorielle** est une ∞-catégorie monoïdale symétrique stable présentable qui est une $\mathfrak{Parf}(\mathrm{k})$-algèbre. L'$\infty$-catégorie des ∞-catégories k-tensorielles est notée $\mathfrak{Tens}_{\mathrm{k}}$.*

Rappelons qu'une ∞-catégorie monoïdale symétrique est dite rigide si tous ses objets sont (nécessairement pleinement) dualisables.

Propostion 23 ([Wal11, Proposition 5.1.5])**.** *Soit $\mathscr{F}, \mathscr{G} \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ une paire d'∞-foncteurs monoïdaux parallèles entre deux ∞-catégories monoïdales symétriques rigides. Alors toute transformation $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ est inversible.*

Définition 24 (Foncteur fibre)**.** *Soit $\mathfrak{T}$ une ∞-catégorie k-tensorielle rigide. Un **foncteur fibre** est un ∞-foncteur monoïdal k-linéaire (on dira k-**tensoriel**) $\omega \colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{Parf}(\mathrm{k})$ tel que $\operatorname{Ind}(\omega)$ soit conservatif et exact, crée une structure de troncation sur $\mathfrak{T}$, et ait un adjoint à droite t-exact.*

Définition 25 (∞-Catégorie tannakienne)**.**

1. *Une **∞-catégorie k-tannakienne neutre** est une ∞-catégorie k-tensorielle rigide qui admet un foncteur fibre.*
2. *Une **∞-catégorie k-tannakienne neutralisée** est une ∞-catégorie k-tannakienne neutre munie d'un choix de foncteur fibre.*

2.2 La gerbe affine des fibres d'une catégorie Tanntakienne neutralisée

Lemme 26. $\mathfrak{Parf}$ *est un champ fpqc.*

Notons $\mathfrak{Tens}_{\mathrm{fpqc}}(\mathrm{k})$ l'∞-catégorie des champs d'∞-catégories k-tensorielles sur le site fpqc de k.

Définition 27. *Un ∞-catégorie k-pointée est une ∞-catégorie k-tensorielle munie d'un ∞-foncteur k-tensoriel $\omega\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{Parf}(\mathrm{k})$. L'$\infty$-catégorie des ∞-catégories k-pointées est $\mathfrak{Tens}_{\mathrm{k},*} := (\mathfrak{Tens}_{\mathrm{k}})_{/\mathfrak{Parf}(\mathrm{k})}$. On note aussi $\mathfrak{Tann}_{\mathrm{k},*}$ l'∞-catégorie pleine sur les ∞-catégories k-tannakiennes neutralisées.*

Construction 28 (Automorphismes d'un foncteur fibre). Soit $(\mathfrak{T}, \omega)$ une ∞-catégorie k-pointée.

L'∞-foncteur $\Delta\colon \mathfrak{Tens}_{\mathrm{k}} \to \mathfrak{Tens}_{\mathrm{fpqc}}(\mathrm{k})$ (adjoint à gauche des sections globales Γ sur $\operatorname{Spec}\mathrm{k}$) donne un morphisme de champs k-tensoriels $\Delta(\omega)\colon \Delta(\mathfrak{T}) \to \Delta(\mathfrak{Parf}(\mathrm{k}))$. On a une équivalence $\mathfrak{Parf}(\mathrm{k}) \simeq \Gamma(\mathfrak{Parf})$, qui donne par adjonction un morphisme $\Delta(\mathfrak{Parf}(\mathrm{k})) \to \mathfrak{Parf}$, et donc en composant $\Delta(\mathfrak{T}) \to \mathfrak{Parf}$.

Ce morphisme est une section globale (*i.e.* sur $\operatorname{Spec}\mathrm{k}$) du champ de morphismes $\mathscr{Map}^{\otimes}_{\mathrm{k}}(\Delta(\mathfrak{T}), \mathfrak{Parf})$, c'est-à-dire un morphisme $\Delta(\omega)\colon 1 := \operatorname{Spec}\mathrm{k} \to \mathscr{Map}^{\otimes}_{\mathrm{k}}(\Delta(\mathfrak{T}), \mathfrak{Parf})$. Ceci fait du champ de morphismes un champ pointé par ω, et on définit le faisceau d'∞-groupes

$$\mathscr{End}(\omega) := \Omega_{\Delta(\omega)}\mathscr{Map}^{\otimes}_{\mathrm{k}}(\Delta(\mathfrak{T}), \mathfrak{Parf}). \tag{5}$$

Propostion 29 ([Wal11, Proposition 5.1.12]). *Si $\mathfrak{T} = \operatorname{Ind}(\mathfrak{T}^{\mathrm{rig}})$, le champ en groupes $\mathscr{End}(\omega)$ est affine.*

Définition 30 (Gerbe pointée des fibres). *La gerbe des fibres de $(\mathfrak{T}, \omega)$ est $\mathscr{Gerbe}(\mathfrak{T}, \omega) = \mathbf{B}\mathscr{End}(\omega)$.*

Propostion 31. *L'∞-foncteur $\mathscr{Gerbe}$ est adjoint à gauche de $\mathfrak{Parf}(-)\colon \mathfrak{Gerbe}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{k},*} \to \mathfrak{Tens}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{k},*}$.*

Démonstration. Dans la sous-section 2.3. $\square$

Définition 32 (Gerbe tannakienne pointée). *Soit $\mathscr{G}$ une gerbe généralisée affine sur k. On lui associe le foncteur fibre $\omega_{\mathscr{G}}\colon \mathfrak{QCoh}(\mathscr{G}) \to \mathfrak{QCoh}(\operatorname{Spec}\mathrm{k}) = \mathfrak{Mod}_{\mathrm{k}}$ et son image par l'∞-foncteur d'objets dualisables $\omega^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{G}}\colon \mathfrak{Parf}(\mathscr{G}) \to \mathfrak{Parf}(\mathrm{k})$.*

*Une **gerbe tannakienne pointée sur** k est une gerbe algébrique généralisée pointée (i.e. de la forme $\mathbf{B}\operatorname{Spec}\mathrm{A}$ pour A une k-algèbre de Hopf de type fini) telle que $\mathscr{End}(\omega_{\mathbf{B}\operatorname{Spec}\mathrm{A}}) \to \mathscr{End}(\omega^{\mathrm{rig}}_{\mathbf{B}\operatorname{Spec}\mathrm{A}})$ soit une équivalence.*

Théorème 33 (Dualité de Tannaka pointée[Wal11, Theorem 5.3.13]). *La restriction de l'∞-foncteur $\mathfrak{Parf}(-)$ aux gerbes pointées qui sont tannakiennes est pleinement fidèle, et son image essentielle est constituée des ∞-catégories k-tannakiennes neutralisées.*

2.3 La gerbe des foncteurs fibres d'une catégorie Tannakienne neutre

Lemme 34. *L'∞-foncteur $\mathfrak{Parf}(-)\colon \mathfrak{Gerbe}_k^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Tens}_k^{\mathrm{rig}}$ admet un adjoint à gauche.*

Démonstration. Un adjoint à gauche $\mathscr{G}\colon \mathfrak{Tens}_k^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{Gerbe}_k^{\mathrm{op}}$ doit vérifier que, pour toute ∞-catégorie k-tensorielle rigide $\mathfrak{T}$ et toute k-algèbre connective A,

$$\mathscr{G}(\mathfrak{T})(A) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_k^{\mathrm{op}}}(\mathscr{G}(\mathfrak{T}), \operatorname{Spec} A) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{Tens}_k^{\mathrm{rig}}}(\mathfrak{T}, \mathfrak{Parf}(A)). \tag{6}$$

Comme $\mathfrak{Parf}$ est un champ, $\mathscr{G}(\mathfrak{T})$ est bien un champ fpqc. $\square$

Définition 35 (Gerbe des foncteurs fibres)**.** *L'adjoint à gauche est dénoté $\mathscr{Fib}\colon \mathfrak{Tens}_k^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{Gerbe}_k^{\mathrm{op}}$. L'image d'une ∞-catégorie* k*-tensorielle rigide est appelée sa **gerbe des foncteurs fibres**.*

Démonstration de la Proposition 31. Soit $(\mathfrak{T}, \omega)$ une ∞-catégorie k-tensorielle rigide pointée, et soit $\mathbf{B}G$ une gerbe algébrique pointée. Remarquons que $\mathscr{Fib}(\mathfrak{T}) = \mathscr{Map}(\mathfrak{T}, \mathfrak{Par}(k))$ est pointée par ω, et qu'on a donc

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_{k,*}^{\mathrm{op}}}(\mathscr{Gerbe}(\mathfrak{T}, \omega), \mathbf{B}G) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_{k,*}}(\mathbf{B}G, (\mathscr{Fib}(\mathfrak{T}), \omega)). \tag{7}$$

Or le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_{k,*}}(\mathbf{B}G, (\mathscr{Fib}(\mathfrak{T}), \omega)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_k}(\mathbf{B}G, \mathscr{Fib}(\mathfrak{T})) \arrow[d] \\ * \arrow[r, "\omega"'] & \mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_k}(1, \mathscr{Fib}(\mathfrak{T})) \end{tikzcd} \tag{8}$$

correspond par adjonction au carré également cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}_{\mathfrak{Tens}_{k,*}^{\mathrm{rig}}}((\mathfrak{T}, \omega), \mathfrak{Parf}(\mathbf{B}G)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Map}_{\mathfrak{Tens}_k^{\mathrm{rig}}}(\mathfrak{T}, \mathfrak{Parf}(\mathbf{B}G)) \arrow[d, "\mathrm{Map}(\mathfrak{T}, \omega_{\mathbf{B}G})"] \\ * \arrow[r, "\omega"'] & \mathrm{Map}_{\mathfrak{Tens}_k^{\mathrm{rig}}}(\mathfrak{T}, \mathfrak{Parf}(k)) \end{tikzcd} \tag{9}$$

On a donc

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{Gerbe}_{k,*}^{\mathrm{op}}}(\mathscr{Gerbe}(\mathfrak{T}, \omega), \mathbf{B}G) = \mathrm{Map}_{\mathfrak{Tens}_{k,*}^{\mathrm{rig}}}((\mathfrak{T}, \omega), \mathfrak{Parf}(\mathbf{B}G)), \tag{10}$$

qui donne l'adjonction. $\square$

Définition 36 (Gerbe tannakienne)**.** *Une gerbe généralisée sur* k *est **tannakienne** si elle est localement une gerbe* k*-tannakienne pointée.*

Lemme 37 ([Wal11, Proposition 5.5.4])**.** *Soit $\mathfrak{T}$ une ∞-catégorie* k*-tensorielle rigide, et soient ω et υ deux foncteurs fibres sur $\mathfrak{T}$. Il existe un recouvrement fpqc* $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} k$ *tel que ω et υ sont équivalents sur* S*.*

Théorème 38 (Dualité de Tannaka neutre[Wal11, Theorem 5.5.3])**.** *Une ∞-catégorie* k*-tensorielle rigide $\mathfrak{T}$ est tannakienne si et seulement si il existe une gerbe* k*-tannakienne $\mathscr{G}$ et une équivalence $\mathfrak{T} = \mathfrak{Parf}(\mathscr{G})$.* $\square$

3 Aplications

Dans cette section, on travaillera sur $k = \Sigma^\infty \kappa$, pour κ un corps.

3.1 Schématisation de types d'homotopie

Définition 39 (Type d'homotopie schématique)**.** *1. Un morphisme de champs dérivés $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est une* ***P-équivalence*** *si l'∞-foncteur induit $\mathfrak{Parf}(\mathscr{G}) \to \mathfrak{Parf}(\mathscr{F})$ est une équivalence. Un champ dérivé est* ***P-local*** *s'il est un objet local pour les P-équivalences.*

2. *Un* ***type d'homotopie schématique pointé sur*** k *est une k-gerbe affine pointée P-locale.*
3. *Soit X un type d'homotopie pointé. Une* ***schématisation*** *de X sur k est un k-type d'homotopie schématique pointé $X \otimes k$ muni d'un morphisme $\Delta(\Pi_\infty X) \to X \otimes k$ universel pour les morphismes vers un type d'homotopie schématique (où Δ est toujours l'∞-foncteur de champ constant, et Π_∞ associe à un type d'homotopie son ∞-groupoïde fondamental).*

Propostion 40 ([Toë06, Proposition 3.3.4])**.** *Tout type d'homotopie pointé connexe admet une schématisation sur k.*

Remarque 41. La construction originale de [Toë06] utilise l'équivalence d'∞-catégories Π_∞ entre les types d'homotopies et les ∞-groupoïdes pour exprimer l'objet pointé $\Pi_\infty X$ connexe de l'∞-topos $\infty - \mathfrak{Grpd}$ comme l'∞-groupoïde classifiant d'un objet en groupes, et définit $X \otimes k$ comme la gerbe classifiante de l'affination du champ constant à ce groupe.

Nous allons utiliser le formalisme tannakien pour donner une autre construction de $(X \otimes k)$.

Construction 42. Soit X un type d'homotopie et soit x un point de X. On note $\mathfrak{Parf}(X, k)$ l'∞-catégorie des complexes parfaits de κ-modules sur X. Le point x définit un foncteur fibre $\omega_x \colon \mathfrak{Parf}(X, k) \to \mathfrak{Parf}(*, k) = \mathfrak{Parf}(k)$.

Conjecture 43 ([Toë00, Conjecture 6.2])**.** *L'∞-catégorie k-tensorielle pointée $(\mathfrak{Parf}(X, k), \omega_x)$ est tannakienne neutralisée. Sa gerbe algébrique pointée duale de Tannaka $\mathscr{G}\!\mathit{erbe}(\mathfrak{Parf}(X, k), \omega_x)$ est la k-schématisation de (X, x).*

Remarque 44. Pour tout spectre en anneaux $\mathcal{E}_\infty$ connectif et borné de base, il existe également une topologie dite **positive**, et une notion correspondante d'∞-catégorie tannakienne positive, avec un théorème de reconstruction tannakien neutralisé. L'∞-catégorie $(\mathfrak{Parf}(X, k), \omega_x)$ est bien tannakienne positive neutralisée d'après [Wal11, Proposition 6.1.2].

3.2 Catégories de motifs

Construction 45 (Catégorie dérivée des motifs). La construction de la catégorie triangulée des motifs géométriques est analogue à celle de la catégorie des motifs purs.

On définit une catégorie additive dont les objets sont les schémas lisses de type fini sur κ et les morphismes sont les correspondances finies. Si X et Y sont deux κ-schémas lisses, le groupe abélien des correspondances finies de X vers Y est le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas fermés de $X \times Y$ intègres, finis sur X et surjectifs sur une composante connexe de X (de façon équivalente, une correspondance de X vers Y est finie si et seulement si elle admet une image inverse selon tout morphisme de but X et une image directe le long de tout morphisme de source Y). La catégorie (triangulée) des motifs géométriques effectifs est l'enveloppe karoubienne du quotient de Verdier de sa catégorie dérivée (la plus petite sous-catégorie épaisse contenant) les morphismes $[X] \otimes [\mathbb{A}^1] = [X \times \mathbb{A}^1] \to [X]$ et $[U \cap V] \to [U \amalg V] = [U] \oplus [V] \to [U \cup V]$.

En notant $\mathscr{M}^{\mathrm{gm}}$ le foncteur induit $\mathfrak{Sch}_{/X}^{\text{lisse}} \to \mathfrak{DM}^{\mathrm{gm,eff}}$, on a bien que $\mathscr{M}^{\mathrm{gm}}(X) \otimes \mathscr{M}^{\mathrm{gm}}(Y) = \mathscr{M}^{\mathrm{gm}}(X \times Y)$ et que $\mathscr{M}^{\mathrm{gm}}(\operatorname{Spec} \kappa)$ est l'unité monoïdale. Pour tout κ-schéma lisse X, soit $\mathscr{M}^{\mathrm{red}}(X)$ un objet complétant (par la gauche) le morphisme $\mathscr{M}^{\mathrm{gm}}(X) \to \mathscr{M}^{\mathrm{gm}}(\operatorname{Spec} \kappa)$ en un triangle distingué. On définit le motif de Tate comme $\mathbb{T} := \mathscr{M}^{\mathrm{red}}(\mathbb{P}^1)[-2]$, et finalement $\mathfrak{DM}^{\mathrm{gm}}(\kappa) = \mathfrak{DM}^{\mathrm{gm,eff}}(\kappa)[\mathbb{T}^{\otimes -1}]$.

Une t-structure sur $\mathfrak{DM}^{\mathrm{gm}}(\kappa)$ est dite **motivique** si elle est non-dégénérée (*i.e.* le foncteur de cohomologie $\tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0}$ est conservatif) et les foncteurs de produit monoïdal et de réalisation (dans $\mathfrak{Mod}_{\mathbb{Q}}$ si κ est de caractériqtique nulle, ou dans $\mathfrak{Mod}_{\mathbb{Q}_\ell}$ sinon) sont t-exacts. Étant donnée une telle t-structure, on peut définir la catégorie des motifs mixtes $\mathfrak{MM}(\kappa)$ comme son cœur. Le foncteur de réalisation lui donne une structure de catégorie κ-tensorielle pointée.

Théorème 46 (Beilinson)**.** *Si il existe une t-structure motivique, $\mathfrak{MM}(\kappa)$ est $\mathbb{Q}$-tannakienne neutralisée.*

Nous référons également à [Suj08, section 4] pour les propriétés tannakiennes des catégories de motifs purs.

Construction 47. Soit X un κ-schéma nœthérien. Une famille de X-morphismes $\{U_\alpha \to U\}$ est un recouvrement de Nisnevich si chacun des morphismes est étale et si tout point de U à valeurs dans un corps se relève à l'un des U_α. Le site de Nisnevich (ou complètement décomposé) de X est la catégorie $\mathfrak{Sch}_{/X}^{\text{lisse,propre}}$ munie de la topologie engendrée par ces familles couvrantes. L'∞-catégorie d'$\mathbb{A}^1$-homotopie instable est la localisation de $\mathfrak{Faisc}_{\mathrm{Nisn}}(\mathfrak{Sch}_{/X}^{\text{lisse,propre}})$ aux morphismes $\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1 \to \mathscr{X}$. Les objets de cette ∞-catégorie sont aussi appelés les espaces motiviques.

L'objet de Tate est l'espace motivique pointé $(\mathbb{P}^1, 1)$. Il s'agit de façon équivalente de la cofibre de $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$. L'$\infty$-catégorie d'$\mathbb{A}^1$-homotopie stable est l'inverseur de l'∞-foncteur $\operatorname{Map}_*((\mathbb{P}^1, 1), -)$. Ses objets sont appelés les **spectres motiviques**.

Théorème 48 ([Wal11, Proposition 6.2.5])**.** *Si ω est conservatif et crée une t-structure, il fait de l'∞-catégorie d'$\mathbb{A}^1$-homotopie stable une ∞-catégorie $\mathbb{S}$-tannakienne positive.*

4 Formalisme tannakien relatif

4.1 Reconstruction d'un morphisme de champs spectraux parfaits

[DAG8, Section 3], [SAG, Chapter 9]

4.2 Correspondances et foncteurs tensoriels

[Iwa18, Section 5]

Références

[DM82] Pierre Deligne, James S. Milne, *Tannakian Categories*

[Hoy17] Marc Hoyois, *Higher Galois Theory*

[Iwa18] Isamu Iwanari, *Tannaka duality and stable ∞-categories*

[HTT] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*

[DAG8] Jacob Lurie, *Derived Algebraic Geometry VIII : Quasi-coherent sheaves and Tannaka Duality Theorems*

[SAG] Jacob Lurie, *Spectral Algebraic Geometry*

[Suj08] Sujatha Ramdorai, Motives from a categorical point of view

[Toë00] Bertrand Toën, *Dualité de Tannaka supérieure I : Structures monoïdales*

[Toë06] Bertrand Toën, *Champs affines*

[Wal11] James Wallbridge, *Higher Tannaka Duality*