Nouvelle algèbre courageuse

David Kern

Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques — Séminaire doctoral

5 novembre 2019

Sommaire – Section 1 : Opérades

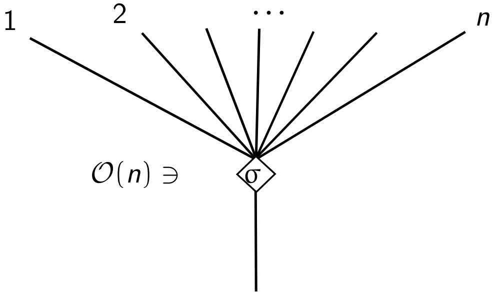
Sommaire – Section 1 : Opérades

Idée

Soit $(\mathfrak{V}, \otimes, 1)$ la catégorie des $\Bbbk$-modules (avec $\otimes_{\Bbbk}$ et $1 = \Bbbk$), ou des espaces topologiques (ou des ensembles, ...).
Une opérade permet d'encoder une structure algébrique sur les objets de $\mathfrak{V}$, c'est-à-dire une collection d'opérations d'arité n pour tous $n \in \mathbb{N}$ et leurs compositions partielles.

Definition

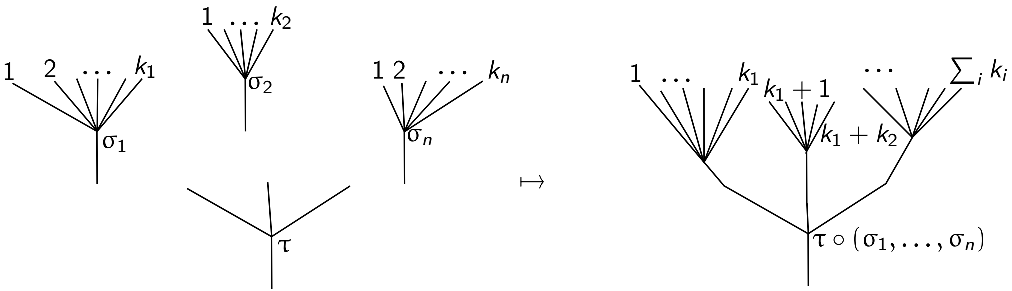
- Un $\mathbb{N}$-module est une collection $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathfrak{V}$: les objets d'opérations n-aires
- Un $\mathbb{S}$-module est un $\mathbb{N}$-module $\mathcal{O}$ dont chaque $\mathcal{O}(n)$ est muni d'une action de $\mathbb{S}_n$ (permutation des entrées)



Composition

Une **opérade** (resp. **symétrique**) est un $\mathbb{N}$-module (resp. $\mathbb{S}$-module) $\mathcal{O}$ muni d'applications

$$\circ\colon \mathcal{O}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{O}(k_i) \to \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \tag{1}$$



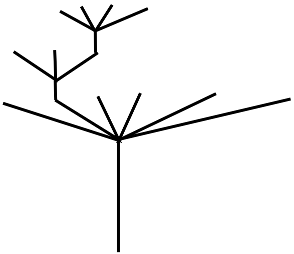
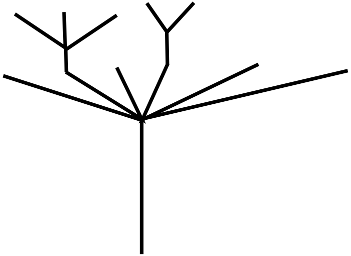
associatives (et $\mathbb{S}$-équivariantes).

Compositions partielles

Il est utile de représenter $\circ$ par les

$$\circ_i \colon \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(k_i) \longrightarrow \mathcal{O}(n + k_i - 1) \qquad (2)$$

qui se doivent de vérifier l'associativité séquentielle et parallèle :

 et  sont définis sans ambiguïté.

Représentations d'opérades

Soit X un objet de $\mathfrak{V}$.

Opérade d'endomorphismes

$\mathcal{E}nd(X)(n) = \underline{\hom}(X^{\otimes n}, X) \qquad (\circlearrowleft \mathbb{S}_n \text{ par } (\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}))$

Composition : $g \circ_i f = g(-, \cdots, -, \underbrace{f(-, \cdots, -)}_{\text{place } i}, -, \cdots, -)$

Une **représentation** de $\mathcal{O}$ sur X est un morphisme d'opérades $r \colon \mathcal{O} \to \mathcal{E}nd(X)$.

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{O}(n) \ni \sigma \mapsto \left(r(\sigma) \colon X^{\otimes n} \to X\right)$$

Une **$\mathcal{O}$-algèbre** dans $\mathfrak{V}$ est un objet muni d'une action de $\mathcal{O}$.

Exemples

Lemme

L'$\mathcal{O}$-algèbre libre sur X est $\coprod_{n\geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes X^{\otimes n}$.

Démonstration.

C'est la formule donnant la monade correspondant à $\mathcal{O}$. $\square$

- L'opérade associative est $\mathcal{A}(n) = 1$

Cas symétrique

La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur X est $\coprod_{n\geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} X^{\otimes n} = \coprod_{n\geq 0} (\mathcal{O}(n) \otimes X^{\otimes n})_{\mathbb{S}_n}$

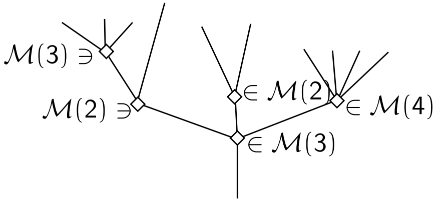
- L'opérade commutative est $\mathcal{C}(n) = 1$ avec l'action triviale de $\mathbb{S}_n$
- L'opérade (symétrique) associative est $\mathcal{A}s(n) = 1[\mathbb{S}_n]$, la représentation régulière

Sommaire – Section 1 : Opérades

Opérades libres

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{N}$-module. On lui associe $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ où

$$\mathcal{T}(\mathcal{M})(n) = \left\{ \begin{array}{c} \text{arbres enracinés planaires à } n \text{ feuilles} \\ \text{nœud de valence } k \text{ décoré par } \in \mathcal{M}(k) \end{array} \right\}$$



et la composition est le collage d'arbres
(et l'identité la branche simple $|$).

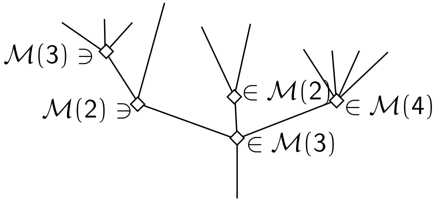
$\mathcal{T}(\mathcal{M})$ est l'opérade libre sur $\mathcal{M}$, au sens où pour toute opérade $\mathcal{O}$

$$\hom_{\mathfrak{Oprd}}(\mathcal{T}(\mathcal{M}), \mathcal{O}) \simeq \hom_{\mathbb{N}-\mathfrak{Mod}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}).$$

Opérades libres

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{N}$-module. On lui associe $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ où

$$\mathcal{T}(\mathcal{M})(n) = \left\{ \begin{array}{c} \text{arbres enracinés planaires à } n \text{ feuilles} \\ \text{nœud de valence } k \text{ décoré par } \in \mathcal{M}(k) \end{array} \right\}$$



et la composition est le collage d'arbres
(et l'identité la branche simple |).

$\mathcal{T}(\mathcal{M})$ est l'opérade libre sur $\mathcal{M}$, au sens où pour toute opérade $\mathcal{O}$

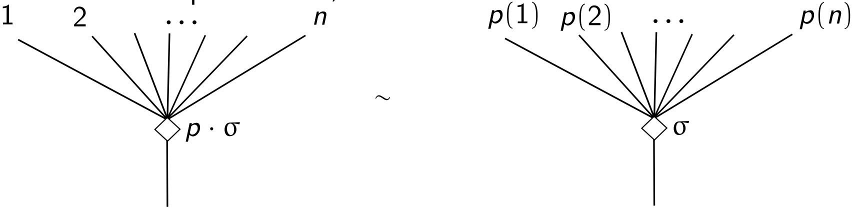
$$\hom_{\mathfrak{Oprd}}(\mathcal{T}(\mathcal{M}), \mathcal{O}) \simeq \hom_{\mathbb{N}-\mathfrak{Mod}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}).$$

$\mathcal{M}$-magmas

En prenant $\mathcal{O} = \mathcal{E}nd(X)$, une structure de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$-algèbre est simplement une collection d'opérations $X^{\otimes n} \to X$ indexée par les éléments de $\mathcal{M}(n)$.

Cas symétrique

$\mathcal{T}^{\mathbb{S}}(\mathcal{M})(n)$ est constitué des arbres non planaires (dans l'espace) avec un ordre sur les feuilles de chaque nœud σ, modulo la relation identifiant :



$\forall p \in \mathbb{S}_n$

Remarque : Induit un ordre sur les feuilles de l'arbre

$\mathcal{M} = (0, 0, \Bbbk\mu, 0, \dots)$ avec

$\mathbb{S}_2$-action triviale : Structure commutative

$\mathbb{S}_2$-action par signature : Structure anti-commutative

Relations et idéaux opéradiques

Definition

Un **idéal** d'une opérade (resp. symétrique) $\mathcal{O}$ est un sous-$\mathbb{N}$-module (resp. $\mathbb{S}$-module) stable par pré- et post-composition par tout élément de $\mathcal{P}$.

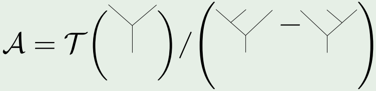
Propriétés

- Tout sous-$\mathbb{N}$-module (resp. $\mathbb{S}$-module) $\mathcal{R}$ est contenu dans un plus petit idéal $(\mathcal{R})$.
- La composition de $\mathcal{P}$ induit une structure d'opérade sur $(\mathcal{P}(n)/\mathcal{I}(n))_n$.

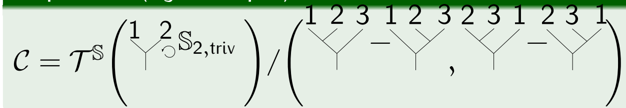
Une $\mathcal{T}(\mathcal{M})/(\mathcal{R})$-algèbre est X muni d'opérations indexés par les éléments de $\mathcal{M}$ soumises aux relations $\mathcal{R}$.

Exemples

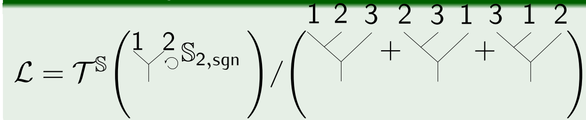
L'opérade associative



L'opérade (symétrique) commutative



L'opérade (symétrique) de Lie



Sommaire - Section 2 : Résolutions d'algèbres associatives

Sommaire – Section 2 : Résolutions d'algèbres associatives

Modules différentiels gradués (dg)

Notation (décalage) $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ un $\Bbbk$-module $\mathbb{Z}$-gradué.
$M[k]$ a la graduation $(M[k])_i = M_{k+i}$ (en particulier $M[k]_{-k} = M_0$).

Definition

Un $\Bbbk$-module dg est un $\Bbbk$-module $\mathbb{N}$-gradué $M = \bigoplus_{i\leq 0} M_i$ muni d'un endomorphisme d de degré 1 (*i.e.* morphisme gradué $d\colon M \to M[-1]$) nilpotent d'ordre 2.

On peut le voir comme une collection de $\Bbbk$-modules $(M_i)_{i\leq 0}$ et d'applications $(d_i\colon M_i \to M_{i+1})_i$ telles que $d_i \circ d_{i-1} = 0$ (*i.e.* $\mathrm{im}(d_{i-1}) \subset \ker(d_i)$).

Décalage

$M[k]$ est muni de $d_i^{M[k]} = (-1)^k d_{i+k}^M$.

Exemples

Produit tensoriel

$(M \otimes N)_i = \bigoplus_{k=0}^{i} M_k \otimes_{\Bbbk} N_{i-k}$, et $d^{M\otimes N}(m \otimes n) = d^M m \otimes n + (-1)^{\deg m} m \otimes d^N n$

Hom interne

$\underline{\mathrm{hom}}(M,N)_i = \mathrm{hom}(M, N[-i])$, et $d(f) = d^N \circ f - (-1)^{\deg f} f \circ d^M$

Remarque : $\underline{\mathrm{hom}}(M,N) = M^{\vee} \otimes N$, où $M^{\vee} = \underline{\mathrm{hom}}(M, \Bbbk)$

(Co)homologie

Le n-ième module de cohomologie de (M,d) est $\mathrm{H}^n(M) = \ker(d_n)/\operatorname{im}(d_{n-1})$.
On obtient un module gradué $\mathrm{H}^{\bullet}(M)$, avec différentielle nulle.

Théorie homotopique des modules dg

Definition (Quasi-isomorphismes)

Un morphisme de modules dg $f\colon M \to N$ est un **qis** si $\mathrm{H}^i(f)\colon\ \mathrm{H}^i(M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^i(N)$ pour tout i

(M, d) et $(\mathrm{H}^\bullet M, 0)$ ont même cohomologie, mais ne sont en général pas reliés un qis.

Théorie homotopique des modules dg

Definition (Quasi-isomorphismes)

Un morphisme de modules dg $f\colon M \to N$ est un **qis** si $\mathrm{H}^i(f)\colon\ \mathrm{H}^i(M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^i(N)$ pour tout i

(M, d) et $(\mathrm{H}^\bullet M, 0)$ ont même cohomologie, mais ne sont en général pas reliés un qis.

Point de vue homotopique

Les modules dg ne doivent être considérés qu'à qis près :
la théorie homotopique marche « comme si » les qis étaient inversibles.

$\Longrightarrow$ Les éléments **exacts** (de la forme $d(m)$) sont « négligeables »

Un élément exact dans $\underline{\hom}(M, N)_{-1}$ est appelé une **homotopie** : $f, g \in \underline{\hom}(M, N)_0$ sont homotopes (égaux dans $\mathrm{H}^0(\underline{\hom}(M, N))$) s'il existe h tel que $f - g = d(h) = d^N \circ h + h \circ d^M$.

Résolution d'opérades dg

Definition

Un morphisme d'opérades dg $f\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ est un qis si chaque $f_n\colon \mathcal{O}(n) \to \mathcal{P}(n)$ en est un.
Une résolution de $\mathcal{O}$ est toute opérade dg quasi-isomorphe à $\mathcal{O}$.

Remarque : On demande généralement qu'une résolution ait de meilleures propriétés, *e.g.* quasi-libre : l'opérade graduée sous-jacente est libre.

On note $\mathcal{O}_\infty$ une résolution quasi-libre de $\mathcal{O}$.

Résolution bar-cobar

Toute opérade $\mathcal{O}$ admet une résolution fonctorielle (mais très large) $\mathcal{O}_\infty \simeq \mathcal{T}\Big(\mathcal{T}^c(\mathcal{O}[-1])[1]\Big)$, où $\mathcal{T}^c$ est la co-opérade colibre, avec des (co)dérivations déterminées en étendant la (co)mposition.

Dualité de Koszul

Si $\mathcal{O}$ admet une présentation quadratique [1], on peut lui associer sa co-opérade duale de Koszul $\mathcal{O}^{¡}$
On également une opérade $\mathcal{O}^{!}$ (un décalage arité par arité du dual linéaire de $\mathcal{O}^{¡}$)

- $\mathcal{A}$ est auto-duale de Koszul : $\mathcal{A}^{!} \simeq \mathcal{A}$
- $\mathcal{C}^{!} = \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{!} = \mathcal{C}$ (on a toujours $(\mathcal{O}^{!})^{!} \simeq \mathcal{O}$)

Sous des hypothèses de Koszulité, on a un qis entre $\mathcal{O}^{¡}$ et la construction bar de $\mathcal{O}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_\infty$ est la construction cobar de $\mathcal{O}^{¡}$

Corollaire

$\mathcal{A}_\infty$ est la construction cobar de la co-opérade duale de $\mathcal{A}$ (décalée de $n-1$ en arité n)

1. par des relations consistant en des composées de 2 générateurs

Sommaire – Section 2 : Résolutions d'algèbres associatives

L'opérade $\mathcal{A}_\infty$

$\mathcal{A}_\infty$ est engendrée par le $\mathbb{N}$-module $(\Bbbk\mu_n)_n$: une opération n-aire μ_n de degré $n-2$, avec différentielle

$$d\mu_n = \sum_{\substack{p,r\geq 0, q>1 \\ n=p+q+r}} (-1)^{p+qr} \mu_{p+1+r} \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes \mu_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) = \sum_{\substack{p,r\geq 0, q>1 \\ n=p+q+r}} (-1)^{p+qr} \mu_{p+r+1} \circ_{p+1} \mu_q$$

$d\mu_3 = \mu_2 \circ (\mu_2 \otimes \mathrm{id}) - \mu_2 \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_2) = \mathrm{Assoc}(\mu_2)$: l'associateur de μ_2 est « négligeable »

Interprétation : En chaque arité n, on ajoute un générateur μ_n dont la différentielle compensera les différentes compositions des μ_k, $k < n$.

$\mathcal{A}_\infty$-algèbres

Une $\mathcal{A}_\infty$-algèbre est un $\Bbbk$-module dg A avec des $\mu_n \colon A^{\otimes n} \to A[n-2]$ tq

$$\sum_{p+q+r=n} (-1)^{p+qr} \mu_{p+1+r} \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes \mu_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) = 0$$

ou

$$\sum_{p+q+r=n} (-1)^{\smiley} \mu_{p+r+1}(a_1, \dots, a_p, \mu_q(a_{p+1}, \dots, a_{p+q}), a_{p+q+1}, \dots, a_n) = 0 \text{ avec } \smiley = p + \sum_{i=1}^{p} |a_i|.$$

Pour $n = 1$: $\mu_1 \circ \mu_1 = 0$: différentielle

Pour $n = 2$: $\mu_1 \circ \mu_2 - \mu_2 \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_1) - \mu_2 \circ (\mu_1 \otimes \mathrm{id}) = 0$: Leibniz

Exemple : théorème de transfert homotopique

Observation Soient $\mu\colon A\otimes A\to A$ une $\mathcal{A}$-algèbre dg, et $A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} M$ un isomorphisme de modules dg. Alors $p\circ\mu\circ(i\otimes i)$ est une structure d'$\mathcal{A}$-algèbre sur M

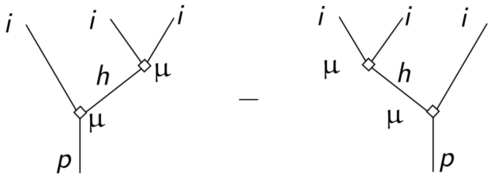
Exemple : théorème de transfert homotopique

Observation Soient $\mu\colon A \otimes A \to A$ une $\mathcal{A}$-algèbre dg, et $A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} M$ un isomorphisme de modules dg. Alors $p \circ \mu \circ (i \otimes i)$ est une structure d'$\mathcal{A}$-algèbre sur M

Supposons maintenant que ip et pi ne soient qu'homotopes à l'identité :

$$\exists h\colon M \to M[1], ip - \mathrm{id}_M = d^M h - hd^M \text{ et } \exists k\colon A \to A[1], pi - \mathrm{id}_A = d^A k - kd^A$$

Dans ce cas



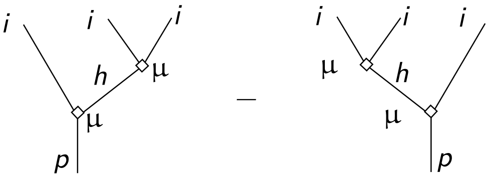
Exemple : théorème de transfert homotopique

Observation Soient $\mu\colon A \otimes A \to A$ une $\mathcal{A}$-algèbre dg, et $A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} M$ un isomorphisme de modules dg. Alors $p \circ \mu \circ (i \otimes i)$ est une structure d'$\mathcal{A}$-algèbre sur M

Supposons maintenant que ip et pi ne soient qu'homotopes à l'identité :

$$\exists h\colon M \to M[1], ip - \mathrm{id}_M = d^M h - hd^M \text{ et } \exists k\colon A \to A[1], pi - \mathrm{id}_A = d^A k - kd^A$$

Dans ce cas la différentielle de



est $\mathrm{Assoc}(p\mu(i \otimes i))$

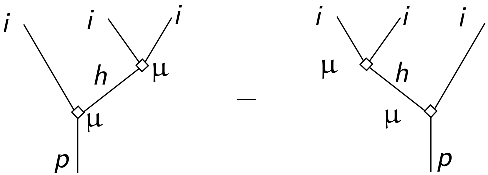
Exemple : théorème de transfert homotopique

Observation Soient $\mu\colon A \otimes A \to A$ une $\mathcal{A}$-algèbre dg, et $A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} M$ un isomorphisme de modules dg. Alors $p \circ \mu \circ (i \otimes i)$ est une structure d'$\mathcal{A}$-algèbre sur M

Supposons maintenant que ip et pi ne soient qu'homotopes à l'identité :

$$\exists h\colon M \to M[1], ip - \mathrm{id}_M = d^M h - hd^M \text{ et } \exists k\colon A \to A[1], pi - \mathrm{id}_A = d^A k - kd^A$$

Dans ce cas la différentielle de



est $\mathrm{Assoc}(p\mu(i \otimes i))$, *etc.* :

$p\mu(i \otimes i)$ est la composante binaire d'une structure $\mathcal{A}_\infty$ (et i s'étend à un $\mathcal{A}_\infty$-morphisme)

Sommaire – Section 2 : Résolutions d'algèbres associatives

Théorie homotopique des opérades topologiques

Rappel : groupes d'homotopie

- X espace topologique. $\pi_0 X$ est l'ensemble de ses composantes connexes.

Théorie homotopique des opérades topologiques

Rappel : groupes d'homotopie

- X espace topologique. $\pi_0 X$ est l'ensemble de ses composantes connexes.
- (X, x) espace pointé. $\Omega_x X$ est l'espace des morphismes $(S_1, *) \to (X, x)$: « lacets basés en x ». Espaces de lacets itérés $\Omega_x^k X = \Omega_{\mathrm{cst}}(\cdots \Omega_{\mathrm{cst}}(\Omega_x X))$
- $\pi_k(X, x) = \pi_0 \Omega_x^k X$: groupe si $k \geq 1$, abélien si $k \geq 2$

Intuition : Ω est un « décalage » des groupes d'homotopie

Théorie homotopique des opérades topologiques

Rappel : groupes d'homotopie

- X espace topologique. $\pi_0 X$ est l'ensemble de ses composantes connexes.
- (X, x) espace pointé. $\Omega_x X$ est l'espace des morphismes $(S_1, *) \to (X, x)$: « lacets basés en x ». Espaces de lacets itérés $\Omega_x^k X = \Omega_{\mathrm{cst}}(\cdots \Omega_{\mathrm{cst}}(\Omega_x X))$
- $\pi_k(X, x) = \pi_0 \Omega_x^k X$: groupe si $k \geq 1$, abélien si $k \geq 2$

Intuition : Ω est un « décalage » des groupes d'homotopie

Une équivalence faible d'homotopie est une fonction continue $f \colon X \to Y$ telle que $f_* \colon \pi_\bullet(X, x) \xrightarrow{\simeq} \pi_\bullet(Y, f(x))$ pour tout x.
Un morphisme d'opérades topologiques est une équivalence faible si chacune de ses composantes l'est.

Les syzygies $\mathcal{A}_\infty$

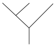
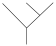
En toute arité n, $\mathcal{A}(n)$ est un point. Une opérade $\mathcal{A}_\infty$ est donc toute opérade avec $\mathcal{A}_\infty(n)$ contractile pour tout n.

On va construire $\mathcal{A}_\infty$ en ajoutant successivement des générateurs en chaque arité

- $\mathcal{A}(2) = \{\mu\}$ et $\mathcal{A}_\infty(2) = \{\mu_2\}$

Les syzygies $\mathcal{A}_\infty$

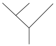
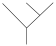
En toute arité n, $\mathcal{A}(n)$ est un point. Une opérade $\mathcal{A}_\infty$ est donc toute opérade avec $\mathcal{A}_\infty(n)$ contractile pour tout n.
On va construire $\mathcal{A}_\infty$ en ajoutant successivement des générateurs en chaque arité

- $\mathcal{A}(2) = \{\mu\}$ et $\mathcal{A}_\infty(2) = \{\mu_2\}$
- $\mathcal{A}_\infty(3) =$  $+$ $+$  si $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{T}(\mu_2)$

Les syzygies $\mathcal{A}_\infty$

En toute arité n, $\mathcal{A}(n)$ est un point. Une opérade $\mathcal{A}_\infty$ est donc toute opérade avec $\mathcal{A}_\infty(n)$ contractile pour tout n.

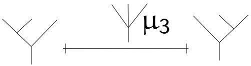
On va construire $\mathcal{A}_\infty$ en ajoutant successivement des générateurs en chaque arité

- $\mathcal{A}(2) = \{\mu\}$ et $\mathcal{A}_\infty(2) = \{\mu_2\}$
- $\mathcal{A}_\infty(3) =$  $+$ $+$  si $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{T}(\mu_2) \Longrightarrow$ On rajoute la 1-cellule μ_3

Les syzygies $\mathcal{A}_\infty$

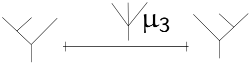
En toute arité n, $\mathcal{A}(n)$ est un point. Une opérade $\mathcal{A}_\infty$ est donc toute opérade avec $\mathcal{A}_\infty(n)$ contractile pour tout n.

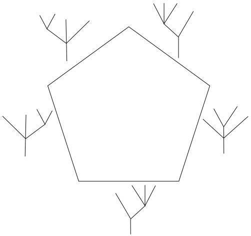
On va construire $\mathcal{A}_\infty$ en ajoutant successivement des générateurs en chaque arité

- $\mathcal{A}(2) = \{\mu\}$ et $\mathcal{A}_\infty(2) = \{\mu_2\}$
- $\mathcal{A}_\infty(3) =$ 

Les syzygies $\mathcal{A}_\infty$

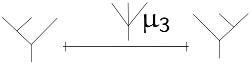
En toute arité n, $\mathcal{A}(n)$ est un point. Une opérade $\mathcal{A}_\infty$ est donc toute opérade avec $\mathcal{A}_\infty(n)$ contractile pour tout n.
On va construire $\mathcal{A}_\infty$ en ajoutant successivement des générateurs en chaque arité

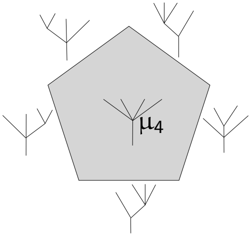
- $\mathcal{A}(2) = \{\mu\}$ et $\mathcal{A}_\infty(2) = \{\mu_2\}$
- $\mathcal{A}_\infty(3) =$ 

- $\mathcal{A}_\infty(4) =$  si $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{T}(\mu_2, \mu_3) \implies$ On remplit par la 2-cellule μ_4

Les syzygies $\mathcal{A}_\infty$

En toute arité n, $\mathcal{A}(n)$ est un point. Une opérade $\mathcal{A}_\infty$ est donc toute opérade avec $\mathcal{A}_\infty(n)$ contractile pour tout n.
On va construire $\mathcal{A}_\infty$ en ajoutant successivement des générateurs en chaque arité

- $\mathcal{A}(2) = \{\mu\}$ et $\mathcal{A}_\infty(2) = \{\mu_2\}$
- $\mathcal{A}_\infty(3) =$ 

- $\mathcal{A}_\infty(4) =$ 

Associaèdres de Tamari–Stasheff et leur réalisation de Loday

$\mathcal{A}_\infty(n)$ est le n–ième associaèdre $\mathcal{K}_n$: polytope convexe dont les sommets sont indicés par les arbres planaires binaires à n–feuilles (APB$_n$).

$\mathcal{K}_5$ est le polytope dual du prisme triangulaire triaugmenté.

Coordonées entières (Loday)

$t \in \mathrm{APB}_n \rightsquigarrow P(t) \in \mathbb{N}^{n-1}$ de i–ième coordonnée :
$\#(\text{feuilles de } t \text{ arrivant à gauche du nœud } i) \times \#(\text{à droite})$

Théorème

- L'enveloppe convexe des $P(t)$ est une réalisation polytopale de $\mathcal{K}_n$.
- $P(t) \in$ hyperplan $x_1 + \cdots + x_{n-1} = \binom{n}{2}$

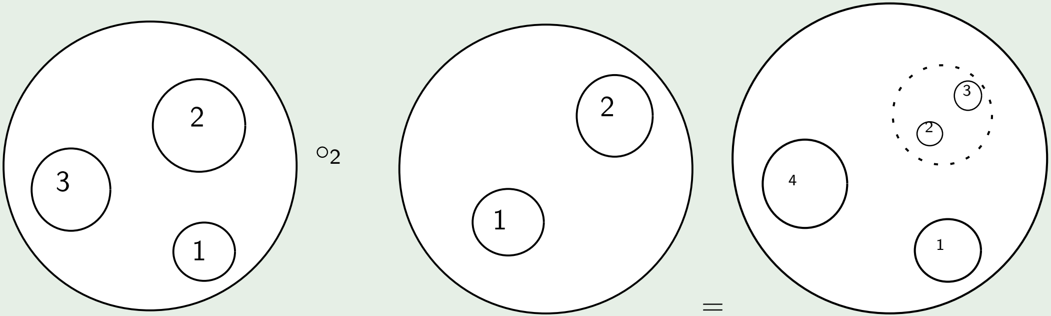
Sommaire – Section 3 : Cas symétrique : les opérades de petits disques

Sommaire – Section 3 : Cas symétrique : les opérades de petits disques

L'opérade des petits disques

$\mathcal{E}_n(k)$ est l'espace des plongements de k petits n-disques disjoints dans le n-disque unité
Composition par insertion de disques et renumérotation

Pour $\circ_2 : \mathcal{E}_2(3) \times \mathcal{E}_2(2) \to \mathcal{E}_2(4)$:



Exemples

Pour $k = 1$, le seul degré de liberté (à homotopie près) dans le plongement de n petits segments est leur ordre : on obtient $\mathcal{A}s$

$\mathcal{E}_k(2) \simeq S^{k-1}$: un k-disque percé est une $(k-1)$-sphère

Extensions

$\mathcal{O}$ opérade unitaire $\rightsquigarrow$ morphisme $\mathcal{O}(n+1) \longrightarrow \mathcal{O}(n)$ oubliant la dernière entrée.
La fibre en $\sigma \in \mathcal{O}(n)$ est $\mathrm{Ext}(\sigma)$.

Pour $\sigma \in \mathcal{E}_k(n)$, $\mathrm{Ext}(\sigma) \simeq \bigvee_{n-1} S^{k-1}$ est un bouquet de sphères

Résolution de l'opérade commutative

Théorème

Pour tout k, $\mathcal{E}_n(k)$ est $(n-2)$-connexe.

Idée de démonstration.

On peut remplacer $\mathcal{E}_n$ par un modèle équivalent : l'opérade des petits n-cubes, avec $\mathcal{D}_n(k)$ l'espace des plongements rectilinéaires de k copies de $\square_n$ dans $\square_n$. On identifie ensuite $\mathcal{D}_n(k)$ à l'espace des configurations de k points dans $\square_n$. $\square$

Corollaire

$\mathcal{E}_\infty \coloneqq \varinjlim(\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \cdots)$ est une opérade $\mathcal{C}_\infty$.

En fait toute opérade avec une « bonne » filtration cellulaire est une opérade $\mathcal{C}_\infty$.

Principe de reconnaissance des espaces de lacets

Définition

Une $\mathcal{E}_k$ algèbre topologique X est **groupique** si le monoïde $\pi_0 X$ est un groupe.

Théorème (May)

Un espace topologique X est muni d'une structure $\mathcal{E}_k$ groupique si et seulement si c'est un espace de lacets k fois itérées, *i.e.* il existe un délaçage pointé (Y, y) tel que $X \simeq \Omega_y^k Y$.

Plus précisément, on a un morphisme de monades $\mathcal{E}_k \to \Omega^k \Sigma^k$ dont les composantes sont des complétions en groupes : $\forall X$, le complété groupique de l'$\mathcal{E}_k$-algèbre libre sur X est $\Omega^k \Sigma^k X$

Remarque : Par définition $\pi_0(\Omega_y^n Y) = \pi_n(Y, y)$ groupe abélien si $n \geq 2$: toutes les structures $\mathcal{E}_{\geq 2}$ sont vues par π_0 comme des structures commutatives

Sommaire – Section 3 : Cas symétrique : les opérades de petits disques

« Définition »

Une $(\infty, 1)$-catégorie a des objets, des 1-morphismes entre eux, des 2-morphismes inversibles entre iceux, etc.

« Définition »

Une $(\infty, 1)$-catégorie a des objets, des 1-morphismes entre eux, des 2-morphismes inversibles entre iceux, etc.

$\implies$ Catégorie (faiblement) enrichie dans les ∞-groupoïdes ($= (\infty, 0)$-catégories)

X espace topologique $\rightsquigarrow \Pi_\infty X$ l'∞-groupoïde fondamental, d'objets les points de X et morphismes (supérieurs) les chemins et homotopies, capture son type d'homotopie

« Définition »

Une $(\infty,1)$-catégorie a des objets, des 1-morphismes entre eux, des 2-morphismes inversibles entre iceux, etc.

$\Longrightarrow$ Catégorie (faiblement) enrichie dans les ∞-groupoïdes ($= (\infty, 0)$-catégories)

X espace topologique $\rightsquigarrow \Pi_\infty X$ l'∞-groupoïde fondamental, d'objets les points de X et morphismes (supérieurs) les chemins et homotopies, capture son type d'homotopie

Hypothèse d'homotopie (Grothendieck)

La théorie des ∞-groupoïdes est équivalente à celle des types d'homotopie d'espaces

On peut modéliser les $(\infty,1)$-catégories comme des « catégories » $\mathfrak{Top}$-enrichies avec une composition $\mathcal{A}_\infty$: $\mu_n\colon \hom(C_{n-1}, C_n) \times \cdots \times \hom(C_0, C_1) \to \hom(C_0, C_n)$

De même, une ∞-opérade est une opérade faible dans les types d'homotopie d'espaces

Rectification et additivité

- L'∞-opérade associative est équivalente à l'∞-opérade $\mathcal{A}_\infty$ (et à $\mathcal{E}_1$)
- L'∞-opérade commutative est équivalente à l'∞-opérade $\mathcal{E}_\infty$

Rectification et additivité

- L'∞-opérade associative est équivalente à l'∞-opérade $\mathcal{A}_\infty$ (et à $\mathcal{E}_1$)
- L'∞-opérade commutative est équivalente à l'∞-opérade $\mathcal{E}_\infty$

Théorème d'additivité de Dunn

Pour toute ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathfrak{V}$ et tous $n, m > 0$ on a une équivalence d'∞-catégories

$$\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_n}(\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_m}(\mathfrak{V})) \simeq \mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_{n+m}}(\mathfrak{V})$$

(venant d'une équivalence d'∞-opérades $\mathcal{E}_{n+m} \simeq \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_m$).

En particulier, $\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_n}(\mathfrak{V}) \simeq \mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_1}(\mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_1}(\cdots \mathfrak{Alg}_{\mathcal{E}_1}(\mathfrak{V})))$: une structure $\mathcal{E}_n$ est constituée de n structures associatives compatibles.

Stabilisation des n-catégories monoïdales

Ici on inclut toutes les n-catégories dans l'∞-catégorie $\infty - \mathfrak{Cat}$.

0. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 0-catégorie (un ensemble) est une structure associative. Une $\mathcal{E}_2$-structure est une structure commutative

   $\Leftarrow$ Argument d'Eckmann–Hilton (*cf.* $\pi_{>1}$) : les monoïdes dans les monoïdes sont des monoïdes commutatifs

Stabilisation des n-catégories monoïdales

Ici on inclut toutes les n-catégories dans l'∞-catégorie $\infty - \mathfrak{Cat}$.

0. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 0-catégorie (un ensemble) est une structure associative. Une $\mathcal{E}_2$-structure est une structure commutative

   $\Leftarrow$ Argument d'Eckmann–Hilton (*cf.* $\pi_{>1}$) : les monoïdes dans les monoïdes sont des monoïdes commutatifs

1. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 1-catégorie est une structure monoïdale. Une $\mathcal{E}_2$-structure est un tressage. Une $\mathcal{E}_3$-structure le rend symétrique.

Stabilisation des n-catégories monoïdales

Ici on inclut toutes les n-catégories dans l'∞-catégorie $\infty - \mathfrak{Cat}$.

0. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 0-catégorie (un ensemble) est une structure associative. Une $\mathcal{E}_2$-structure est une structure commutative

   $\Leftarrow$ Argument d'Eckmann–Hilton (*cf.* $\pi_{>1}$) : les monoïdes dans les monoïdes sont des monoïdes commutatifs

1. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 1-catégorie est une structure monoïdale. Une $\mathcal{E}_2$-structure est un tressage. Une $\mathcal{E}_3$-structure le rend symétrique.
2. ...

Stabilisation des n-catégories monoïdales

Ici on inclut toutes les n-catégories dans l'∞-catégorie $\infty - \mathfrak{Cat}$.

0. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 0-catégorie (un ensemble) est une structure associative. Une $\mathcal{E}_2$-structure est une structure commutative

   $\Leftarrow$ Argument d'Eckmann–Hilton (*cf.* $\pi_{>1}$) : les monoïdes dans les monoïdes sont des monoïdes commutatifs

1. Une $\mathcal{E}_1$-structure sur une 1-catégorie est une structure monoïdale. Une $\mathcal{E}_2$-structure est un tressage. Une $\mathcal{E}_3$-structure le rend symétrique.

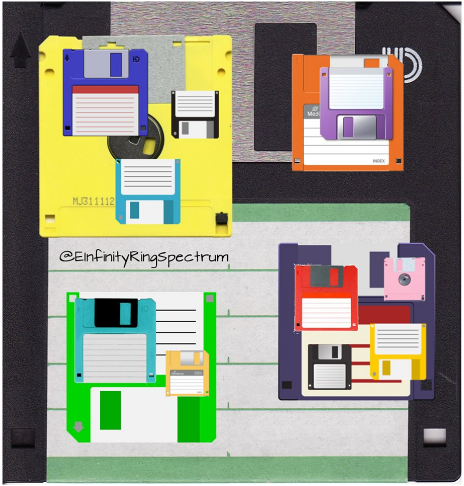
2. ...

Hypothèse de stabilisation de Baez–Dolan (Lurie, Gepner–Haugseng)

Sur toute n-catégorie, pour tout $k \geq n+2$, une $\mathcal{E}_k$-structure équivaut à une $\mathcal{E}_\infty$-structure.

$\Longrightarrow$ Nécessité des ∞-catégories pour accéder à toute la hiérarchie $(\mathcal{E}_k)_k$

Fin



- Jean-Louis Loday et Bruno Vallette, *Algebraic Operads*
- Bruno Vallette, *Algebra+homotopy=operads*
- Martin Markl, Steve Shnider et Jim Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*
- Yonatan Harpaz, *Little cube algebras and factorization homology* (cours M2)