

Catégorification du principe de Lefschetz quantique avec les champs de modules dérivés

David KERN

Le principe de Lefschetz quantique est un outil de calcul en théorie de Gromov–Witten, qui vient d’une intuition géométrique assez limpide mais nécessite un certain nombre d’hypothèses techniques pour être réalisé. Dans cet exposé, je vais expliquer que la géométrie dérivée permet de faire fi de ces hypothèses et faire ressortir toute la géométrie de la situation.

Introduction

Soit X un schéma projectif lisse (sur un corps \mathbb{k} de caractéristique 0). Les invariants de Gromov–Witten de X sont des nombres permettant de construire une déformation quantique de l’anneau de cohomologie $(A^\bullet X, \smile)$ (auquel on peut penser comme une version algébrique de $H^{2\bullet}(X, \mathbb{Z})$). Ils sont obtenus comme des intégrales de certaines classes de cohomologie sur le champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ des courbes stables, en énumérant les courbes dans X qui vérifient certaines conditions d’incidence.

Plus précisément, fixant $\beta \in A_1 X$ (penser encore à $H_2(X, \mathbb{Z})$), on a un champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ modulant les applications stables $f: C \rightarrow X$ depuis des courbes (C, x_1, \dots, x_n) de genre g à n points marqués vers X de classe $f_*[C] = \beta$. Il est naturellement muni de morphismes ev_i d’évaluation aux points marqués et $Stab$ d’oubli de l’application (et stabilisation de la courbe), le place dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) & \\
 \text{Stab} \swarrow & & \searrow (ev_1, \dots, ev_n) \\
 \overline{\mathcal{M}}_{g,n} & & X^n
 \end{array} \tag{1}$$

et les classes de GW sont obtenues en appliquant $Stab_*(ev_1, \dots, ev_n)^*$ aux classes de cohomologie sur X . On peut interpréter $Stab_*$ comme une intégration fibre-à-fibre le long de $Stab$, donc un accouplement avec une classe fondamentale de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$.

Théorème (Kontsevich–Manin '94, Behrend–Manin '96). *Le champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ est un champ de Deligne–Mumford propre, mais pas lisse, ni même équidimensionnel.*

La propriété est nécessaire pour assurer la finitude des intégrales, mais le défaut d'équidimensionnalité implique que ce champ n'a pas de bonne classe fondamentale; il faut utiliser une classe virtuelle $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\text{vir}}$, la classe qui « serait la classe fondamentale de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ s'il était lisse, construite *via* la théorie des déformations. La classe virtuelle n'est pas un vrai objet géométrique sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$, et une autre approche consiste donc à remplacer ce champ par un objet géométrique d'un type plus général, qui incorpore toutes les informations de déformations : un champ algébrique dérivé $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$.

Nous allons maintenant appliquer cette philosophie à l'étude d'un problème en théorie de Gromov–Witten.

Soient E un fibré vectoriel sur X et σ une section régulière de E , de lieu des zéros Z comme dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{0} & E. \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \langle Z = X \cap \text{eu}_{(s)}(E) \rangle \quad (2)$$

Le théorème hyperplan de Lefschetz dit que la cohomologie de Z est celle de X tordue par E : on le voit au niveau des classes fondamentales dans le fait que $[Z] = [X] \frown c_{\text{top}}(E)$. Le principe de Lefschetz quantique établit la même relation pour les anneaux de cohomologie quantiques de X (tordu par E) et de Z . Ceux-ci étant régis par les champs $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(-)$, il devrait correspondre à la relation géométrique

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(Z) & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\sigma) \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X) & \xrightarrow{0} & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(E). \end{array} \quad (3)$$

Comme les classes de Gromov–Witten n'utilisent pas seulement le champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(Z)$ mais aussi sa classe virtuelle, qui n'est pas codée dans sa géométrie, cette identification n'est pas suffisante. Le passage de ce diagramme à la formule d'intersection pour les classes virtuelles passe en effet par des calculs de propriétés de functorialité des classes virtuelles, et nécessite plusieurs hypothèses techniques sur E et s . L'idée va être de remplacer $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(Z)$ par l'objet géométrique plus général $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(Z)$ dont la classe fondamentale est la classe virtuelle, et qui donne donc une formulation géométrique du principe de Lefschetz quantique :

Théorème (K. '20). *Le diagramme de champs dérivés*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(Z) & \hookrightarrow & \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X) \\ \downarrow & \lrcorner^{\text{h}} & \downarrow \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\sigma) \\ \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X) & \xrightarrow{0} & \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(E), \end{array} \quad (4)$$

est cartésien, sans aucune hypothèse.

Notons toutefois que ce diagramme ne peut pas être cartésien au sens strict mais au sens de ces nouveaux espaces, qui est un sens homotopique (ou plutôt ∞ -catégorique).

Remarque. Ayant vu que la notion de diagramme cartésien devait être résolue par celle de diagramme homotopiquement cartésien, on pourrait vouloir remplacer Équation 2 par un diagramme homotopiquement cartésien, c'est-à-dire remplacer Z par l'intersection dérivée avec la section 0 , le lieu de zéros dérivé. Nous le ferons en temps voulu.

Du point de vue algébrique, une telle intersection dérivée est donnée par le complexe de Koszul, une adgc qui raffine (et catégorifie) la classe d'Euler.

1 Le principe de Lefschetz quantique

Considérons la courbe universelle

$$\begin{array}{ccc} & \overline{\mathcal{C}}_{g,n}(X, \beta) & \\ \text{pr} \swarrow & & \searrow \text{ev} \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) & & X. \end{array} \quad (5)$$

Un fibré vectoriel E sur X correspond à un \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{E} tel que $E = \mathbb{V}_X(\mathcal{E}) := \text{Spec}_X \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}^\vee)$, que l'on peut tirer et pousser pour obtenir l' $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)}$ -module cohérent $\text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E}$. De façon générale ce n'est pas un module localement libre : le foncteur qui se comporte bien est $\mathbb{R} \text{pr}_* \circ \text{ev}^*$.

Remarquons que $\text{pr}: \overline{\mathcal{C}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ est une courbe (relative), et que $\mathbb{R} \text{pr}_*$ correspond donc à prendre les sections globales dérivées fibre-à-fibre. Si $(C, f: C \rightarrow X)$ est un point géométrique de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$, on a alors

$$(\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E})_{(C, f)} = \mathbb{R} \Gamma(C, f^* \mathcal{E}). \quad (6)$$

Comme C est une courbe, on trouve uniquement des groupes de cohomologie en degrés 0 et 1.

Définition. Le fibré vectoriel $\mathbb{V}_X(\mathcal{E})$ sur X est *convexe* si pour tout morphisme $f: C \rightarrow X$ depuis une courbe de genre 0, on a $\mathbb{R}^1 \Gamma(C, f^* \mathcal{E}) = 0$.

Si \mathcal{E} est convexe, alors pour $g = 0$ on a $\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E} = \mathbb{R}^0 \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E}$, qui est alors un module localement libre correspondant au fibré vectoriel $\mathbb{E}_{0,n}$. Cependant, en genre supérieur $g > 0$, rappelons que $\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{R}^1 \Gamma(C, \mathcal{O}_C) = g$, donc aucune notion de convexité ne peut dompter la cohomologie supérieure.

Remarque. Il nous sera pratique de travailler non pas avec les classes fondamentales virtuelles mais avec leurs relèvements à des classes de K-théorie, les faisceaux structuraux virtuels $\left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)}^{\text{vir}} \right] \in G_0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)) := K_0(\mathcal{C}oh^b(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)))$.

En effet, la géométrie dérivée n'a pas de formalisme des groupes de Chow.

Théorème (Kim–Kresch–Pantev ’03, Joshua ’10). *Supposons que E est convexe et σ est une section régulière. Notons $i: Z \hookrightarrow X$ l’inclusion du lieu des zéros de σ , et $u_\gamma: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Z, \gamma) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ pour toute classe $\gamma \in A_1 Z$ telle que $i_*\gamma = \beta$. Alors*

$$\sum_{i_*\gamma=\beta} u_{\gamma,*} \left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Z,\gamma)}^{\text{vir}} \right] = \left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)}^{\text{vir}} \right] \otimes \wedge^\bullet \left((\mathbb{R}^0 \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E})^\vee \right) \in G_0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)) \quad (7)$$

où $\wedge^\bullet \mathcal{F} = \lambda_{-1}(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\wedge^i \mathcal{F}]$ relève (à travers ch) la classe d’Euler.

Théorème (K. 20’). *Ne supposons rien du tout. Avec les notations mutatis mutandis pour les $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, on a*

$$\bigoplus_{i_*\gamma=\beta} u_{\gamma,*} \mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(Z,\gamma)} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)} \otimes \underbrace{\wedge_s^\bullet}_{\mathcal{K}os(s)} (\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E})^\vee \in \mathcal{QCoh}(\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)). \quad (8)$$

C’est une catégorification du théorème classique, qui (le complexe de Koszul calculant les intersections dérivées) est conséquence du diagramme Équation 4. Ainsi Équation 4 est une *géométrification* du principe de Lefschetz quantique.

Remarque. L’hypothèse de régularité de σ assure que le produit fibré homotopique coïncide avec le produit fibré strict, mais est attendue du point de vue de la théorie de Gromov–Witten puisqu’elle donne une cible Z lisse.

Notre but pour le reste de l’exposé va être d’expliquer les différents ingrédients qui permettent de passer de Équation 7 à Équation 8.

1. Les lieux de zéros dérivés, *i.e.* les intersections dérivées données par $\otimes^{\mathbb{L}}$.
2. Le sens du complexe $\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E}$ comme « fibré ».
3. Le champ de modules dérivé d’application stables $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$.
4. Le rôle modulaire du fibré $\mathbb{R}\mathcal{E}_{g,n}$.
5. Le calcul des lieux de zéros par le complexe de Koszul pour obtenir l’excès d’intersection.

2 Champs de modules dérivés

Si l’on veut s’affranchir des hypothèse de convexité et de genre, il nous faut être capables de considérer le complexe $\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E}$, et pas juste son 0-ième objet de cohomologie, comme un fibré vectoriel. En effet, bien que le \mathbb{R}^0 (et le \mathbb{R}^1) ne soit qu’un faisceau cohérent, dont le rang peut sauter, la différence $\dim \mathbb{R}^0 - \dim \mathbb{R}^1$ est déterminée par le théorème de Riemann–Roch, et en particulier constante : les sauts de rang de \mathbb{R}^0 et \mathbb{R}^1 se compensent, et permettent de voir la différence $\mathbb{R}^0 - \mathbb{R}^1$ comme le rang d’un objet unifié, un « fibré vectoriel ».

Voyons maintenant comment le faire de manière algébrique. Soit \mathcal{F}^\bullet un complexe d’ \mathcal{O}_M -modules, vu comme un objet de l’ ∞ -catégorie dérivée $\mathbb{D}\mathcal{QCoh}(M)$. On a l’ ∞ -foncteur $\mathbb{L}\text{Sym}_{\mathcal{O}_M}: \mathbb{D}\mathcal{QCoh}(M) \rightarrow \mathcal{Alg}(\mathbb{D}\mathcal{QCoh}(M))$. On veut donner un sens géométrique à $\text{Spec}_M(\mathbb{L}\text{Sym}_{\mathcal{O}_M} \mathcal{F}^\bullet, \mathbb{R}^\vee)$. Comme les corrections aux défauts de lissité vivent aussi

en cohomologie, ce nouveau point de vue nous permettra aussi d'ignorer l'hypothèse de régularité de σ , ainsi que la « virtualisation ».

On peut le faire en le voyant comme un M -schéma affine *dérivé*, c'est-à-dire que l'on doit travailler dans le cadre de la géométrie algébrique dérivée, qui est comme la géométrie algébrique avec la catégorie des anneaux remplacée par l' ∞ -catégorie des anneaux dérivés. Comme on travaille dans une catégorie supérieure (ou homotopique), les propriétés universelles strictes sont remplacées par des propriétés universelles homotopiques : par exemple, l'intersection homotopique de schémas affines dérivés est donnée par le produit tensoriel dérivé

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathbb{Z}}^h Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} B) & \longrightarrow & X = \mathrm{Spec}(A) \\ \downarrow & \text{--}^h & \downarrow \\ Y = \mathrm{Spec}(B) & \longrightarrow & Z = \mathrm{Spec}(C). \end{array} \quad (9)$$

On peut le voir comme le schéma $\mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{C}}^{\mathbb{L}} B)$ augmenté des $\mathrm{Tor}_{\mathbb{C}}^i(A, B)$ qui donnent des fonctions nilpotentes vivant en degrés cohomologiques supérieurs.

Exemple. Calculons l'auto-intersection dérivée de 0 dans \mathbb{A}^1 ; topologiquement, l'intuition est celle de l'espace de lacets (virtuels) basés en 0 dans \mathbb{A}^1 . Algébriquement, on doit calculer $\mathrm{Spec}(\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[x]}^{\mathbb{L}} \mathbb{k})$.

Pour dériver le foncteur $(\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[x]} -)$, on prend une résolution quasi-libre de \mathbb{k} comme $\mathbb{k}[x]$ -algèbre. La flèche $\mathbb{k}[x] \xrightarrow{x} \mathbb{k}[x]$ a bien pour image l'idéal (x) de sorte que $H^0 = \mathbb{k}[x]/(x) = \mathbb{k}$, et comme x n'est pas un diviseur de zéro c'est un morphisme injectif et le complexe $\cdots 0 \rightarrow \mathbb{k}[x] \xrightarrow{x} \mathbb{k}[x]$ est exact et une résolution de \mathbb{k} . Ensuite on applique $\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[x]} -$, c'est-à-dire que l'on tue x , pour obtenir $\cdots 0 \rightarrow \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k}$.

La multiplication dans une algèbre dg étant commutative au sens gradué, un générateur de degré -1 est nilpotent et on peut donc écrire

$$\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[x]}^{\mathbb{L}} \mathbb{k} = \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}[1] = \mathbb{k}[\varepsilon_{-1}]/(\varepsilon_{-1}^2) \quad (10)$$

où \oplus désigne l'extension de carré nul triviale et ε_{-1} est un générateur de degré -1 .

Nous avons ici calculé le lieu des zéros dérivé de la fonction 0 sur $\{0\}$; nous verrons que des phénomènes similaires se produisent pour les lieux de zéros dérivés généraux.

À partir de maintenant on travaillera naturellement dans l' ∞ -catégorie des champs dérivés, c'est-à-dire que l'on considérera que les foncteurs sont toujours dérivés (et on ne l'écrira donc plus).

Définition. À tout champ dérivé $\mathbb{R}M$ on peut associer son tronqué, un champ classique $t_0(\mathbb{R}M)$. On dit alors que $\mathbb{R}M$ est un **épaississement dérivé** de $M = t_0\mathbb{R}M$.

Exemple (Ciocan-Fontanine–Kapranov '00, Toën–Vezzosi(–Schürg) '15). Soient S un champ classique de base, C un S -champ classique et X un S -champ (potentiellement dérivé). On a un S -champ dérivé de morphismes $\mathbb{R}\mathcal{H}om_S(C, X)$ qui épaissit $\mathcal{H}om_S(C, t_0X)$.

Même si X est classique, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{/S}(\mathbb{C}, X)$ a une structure dérivée non triviale, contenant l'information des $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_S}^{-i}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_C)$.

En outre, tout sous-champ ouvert s'étend à un unique sous-champ dérivé ouvert de l'épaississement. On obtient ainsi un épaississement dérivé $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\tau_0 X, \beta)$.

Proposition. *Soit $\mathbb{R}M$ un épaississement dérivé de M . On a une immersion fermée $\mathcal{J}_{\mathbb{R}M}: M \hookrightarrow \mathbb{R}M$.*

L'application induite $\mathcal{J}_{\mathbb{R}M,}: G_0(M) \rightarrow G_0(\mathbb{R}M)$ est un isomorphisme, d'inverse $[\mathcal{F}] \mapsto \sum_{i \leq 0} (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathcal{F})]$.*

Théorème (Mann–Robalo). *Le faisceau virtuel $\left[\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)}^{\text{vir}} \right]$ est $\mathcal{J}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta),*}^{-1} \left(\left[\mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)} \right] \right)$.*

Corollaire (Slogan). *La géométrie virtuelle de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ est la géométrie de $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$.*

Nous pouvons maintenant comprendre la situation du principe de Lefschetz quantique, indépendamment de toute hypothèse sur E et σ . On prend cette fois-ci $\mathbb{R}Z = \mathbb{R}Z(\sigma)$ le lieu des zéros dérivé de σ , et on définit le fibré vectoriel dérivé

$$\mathbb{R}\mathcal{E}_{g,n} = \text{Spec}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)} \text{Sym}_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)}} (\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E}^\vee) \quad (11)$$

sur $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$.

La section $\sigma: X \rightarrow E$ correspond à un morphisme d' \mathcal{O}_X -algèbres $\sigma^\#: \text{Sym}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X$, donc à un morphisme d' \mathcal{O}_X -modules $s: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}$. On le fait également transgresser vers $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ pour obtenir une section de $\mathbb{R}\mathcal{E}_{g,n}$, que l'on note $\mathbb{R}s_{g,n} = \mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \sigma$.

Théorème. $\coprod_{i_* \gamma = \beta} \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{R}Z, \gamma)$ est le lieu des zéros de $\mathbb{R}s$:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i_* \gamma = \beta} \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{R}Z, \gamma) & \longrightarrow & \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \\ \downarrow & \text{--h} & \downarrow \mathbb{R}s_{g,n} \\ \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) & \xrightarrow{0} & \mathbb{R}\mathcal{E}_{g,n}. \end{array} \quad (12)$$

Ce résultat repose sur l'interprétation du fibré $\mathbb{R}\mathcal{E}_{g,n}$:

Lemme. *Le fibré $\mathbb{R}\mathcal{E}_{g,n}$ est le champ de modules dérivé $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(E/X, \beta)$ des applications stables dans E de classe β après projection sur X .*

3 Catégorification

À l'aide de l'interprétation dérivée, on comprend que la formule de Lefschetz quantique se réécrit, après application de l'isomorphisme \mathcal{J}_* , comme $\sum_{i_* \gamma = \beta} \mathbf{u}_{\gamma,*} [\mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Z,\gamma)}] = [\mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)}] \otimes \wedge^\bullet ((\mathbb{R} \text{pr}_* \text{ev}^* \mathcal{E})^\vee)$. Catégorifier cette formule veut dire la relever de $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}oh^b(\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)))$ à $\mathbb{D} \mathcal{C}oh^b(\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta))$. Dans cette ∞ -catégorie, $\bigoplus_{\gamma} \mathbf{u}_{\gamma,*} \mathcal{O}_{\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Z,\gamma)} =$

$u_* \mathcal{O}_{\coprod_{\gamma} \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Z,\gamma)}$ est (le module sous-jacent de) l'anneau de fonctions du $\mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ -schéma affine $\coprod_{\gamma} \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(Z, \gamma)$ que nous avons identifié comme un lieu de zéros : la question de la catégorification est donc celle de calculer l'anneau de fonctions d'un lieu de zéros dérivé.

Construction (Complexe de Koszul). Nous allons généraliser notre premier exemple d'intersection dérivée aux lieux de zéros dérivés. Soient M un champ, $F = \text{Spec}_M(\text{Sym}_{\mathcal{O}_M} \mathcal{F}^\vee)$ un fibré vectoriel sur M et s une section de F . On cherche à calculer $\mathcal{O}_M \otimes_{\mathcal{S}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_M$ où $\mathcal{S} = \text{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{F}^\vee)$.

La résolution de Koszul de \mathcal{O}_M (vu comme \mathcal{S} -module par la section 0) est le complexe $\mathcal{Kos}^\bullet(\mathcal{F}) = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_M} \wedge^{-\bullet} \mathcal{F}^\vee$, avec différentielle

$$\begin{aligned} d: \mathcal{Kos}^{-n}(\mathcal{F}) = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_M} \wedge^n \mathcal{F}^\vee &\rightarrow \mathcal{Kos}^{-n+1}(\mathcal{F}) = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_M} \wedge^{n-1} \mathcal{F}^\vee \\ \alpha \otimes (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) &\mapsto \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (-1)^k \alpha \eta_\ell \otimes \varphi_k(f_\ell) \cdot \varphi_1 \wedge \cdots \widehat{\varphi}_k \cdots \wedge \varphi_n \end{aligned} \quad (13)$$

où $\sum_{\ell} \eta_\ell \otimes f_\ell$ est l'image de $1 \in \mathcal{O}_M$ dans $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ par coev.

En tensorisant $\mathcal{Kos}(\mathcal{F})$ avec \mathcal{O}_M qui est cette fois vu comme \mathcal{S} -algèbre *via* s , on obtient $\mathcal{Kos}^\bullet(\mathcal{F}, s) = \wedge^{-\bullet} \mathcal{F}^\vee$ muni de la différentielle

$$d_s: f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \mapsto \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} s(f_k) \cdot f_1 \wedge \cdots \widehat{f}_k \cdots \wedge f_n. \quad (14)$$

Pour une intersection dérivée d'objets classiques, on obtient bien une version catégorifiée de la classe d'Euler; c'en est même une version raffinée puisqu'elle tient compte de la section s et pas juste de \mathcal{F} . Mais il y a deux problèmes :

1. Nous avons supposé que M et F n'étaient pas dérivés. S'ils le sont, on trouve les bonnes notions de résolution d'algèbre commutative dg dans Fresse, *Modules over operads and functors*, mais les calculs pour Koszul sont beaucoup plus compliqués (et introuvables dans la littérature).
2. La résolution de Koszul n'est qu'un choix de résolution, et le complexe obtenu n'est qu'une présentation du module dérivé cherché. On peut alors penser que l'apparition des puissances extérieures n'est qu'une coïncidence, alors qu'elles doivent bien apparaître dans la formule de Lefschetz.

La solution à ces deux problèmes est d'avoir un calcul intrinsèque, c'est-à-dire purement ∞ -catégorique, de l'anneau de fonctions du lieu de zéros.

Exemple (Puissances antisymétriques). Expliquons aussi la classe d'Euler $\wedge^{-\bullet} \mathcal{F}$. Soit \mathcal{F} un module classique, disons projectif, vu comme un module dg concentré en degré cohomologique 0. Son algèbre symétrique est $\text{Sym}^\bullet(\mathcal{F})$, aussi concentrée en degré cohomologique 0.

Si l'on décale \mathcal{F} en degré impair -1 , les règles de commutation graduée imposent que, dans $\text{Sym}^\bullet(\mathcal{F}[1])$, il devra anti-commuter : on a obtenu l'algèbre extérieure. Remarquons

que le terme de poids k , $Sym^k(\mathcal{F}[1])$ sera maintenant en degré $-k$; on a séparé les degrés, ce qui explique l'apparition des signes en G-théorie.

On définira donc l'algèbre extérieure d'un module dérivé \mathcal{F} quelconque comme $\wedge^\bullet \mathcal{F} = \bigoplus_{k \geq 0} Sym^k(\mathcal{F}[1])[-k]$.

Le décalage $\mathcal{F}[1]$ est la cofibre (le conoyau homotopique) de $0 \xrightarrow{0} M$. Comme le complexe de Koszul raffine la classe d'Euler avec la donnée de s , on s'attend à obtenir plutôt la cofibre de $\mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{F}^\vee$.

On considère la linéarisation $\mathbb{A}_M^1 = M \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{V}_M(\mathcal{F})$; son noyau est $\mathbb{R}Z(s) \times_M \mathbb{A}_M^1$, et aussi le fibré correspondant à $\text{cofib}(\tilde{s}: \mathcal{F}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_M)$. On a ainsi une action libre du groupe additif \mathbb{A}_M^1 sur $\text{Spec}_M Sym_{\mathcal{O}_M}(\text{cofib} \tilde{s})$, et $\mathbb{R}Z(s)$ en est le quotient, ce qui se traduit en termes d'algèbre de fonctions comme

$$u_* \mathcal{O}_{\mathbb{R}Z(s)} = Sym_{\mathcal{O}_M}(\text{cofib} \tilde{s})^{\mathbb{A}_M^1}. \quad (15)$$

Ce complexe n'est dans $\mathbb{D} \mathcal{C}oh^b$ que si $\mathbb{R}Z(s)$ est quasi-lisse, ce qui lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{E}_{g,n}$ nécessite les hypothèses classiques.