

Théorie algébrique de Gromov–Witten en genre 0

David KERN

26 mai 2017

Table des matières

Introduction	1
0 Théorie de l'intersection des variétés algébriques	2
0.1 Espaces et morphismes de la géométrie algébrique	2
0.1.1 La catégorie des variétés algébriques	2
0.1.2 Faisceaux et schémas	4
0.1.3 Propriétés des schémas et de leurs morphismes, sous-variétés	7
0.1.4 Éclatements	9
0.2 Groupe de Chow, cycles et classes d'intersection	11
0.2.1 Cycles et équivalences rationnelles	11
0.2.2 Diviseurs, faisceaux inversibles et classes de Chern	12
0.2.3 Le produit d'intersection	12
0.2.4 Anneau de Chow, cap- et cup-produits	13
1 Espace de modules des courbes stables	15
1.1 Familles universelles et espaces de modules	15
1.1.1 Espaces de modules fins	15
1.1.2 Espaces de modules grossiers et champs de modules	17
1.2 Courbes à points marqués et stabilisation	18
1.2.1 Familles de courbes à n points marqués	18
1.2.2 Compactification et bord	21
1.2.3 Courbes <u>pré</u> stables et stables	22
1.3 Construction de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$	25
1.3.1 Contraction et stabilisation	25
1.3.2 Construction récursive	27
1.3.3 Étude du bord	29
2 Espace de modules des applications stables	32
2.1 Applications stables	32
2.1.1 Espace de modules $\mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)$	32
2.1.2 Applications stables et rigidification : définitions	34
2.2 Construction de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$	36

2.2.1	Espace de modules fin $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$ des applications rigides	36
2.2.2	Recollement des espaces rigides	40
2.2.3	Plongement d'une variété projective	43
3	Anneau de cohomologie quantique	46
3.1	Invariants de Gromov–Witten	46
3.1.1	Morphismes d'évaluation et étude du bord	46
3.1.2	Classes et invariants de Gromov–Witten	47
3.2	Potentiel de Gromov–Witten	50
3.2.1	Fonctions génératrices et potentiel de Gromov–Witten	50
3.2.2	Cup-produit quantique	53
3.3	Variétés de Frobenius et théorie axiomatique	54
3.3.1	Axiomes pour la théorie de Gromov–Witten	54
3.3.2	Algèbres et variétés de Frobenius	55
3.3.3	Théories cohomologiques des champs et fonctions de corrélation	56
	Bibliographie	59
	Index	61

Introduction

La théorie de Gromov–Witten trouve sa motivation dans la littérature physique, où elle permet le calcul rigoureux des intégrales de chemin du sigma-modèle topologique[Wit91]. En effet, la théorie des cordes topologique consiste en l'étude des plongements holomorphes de la surface d'univers d'une corde, une surface de Riemann, dans un 3-fold Calabi–Yau correspondant aux dimensions supplémentaires d'espace-temps compactifiées.

Le calcul quantique nécessite une intégration sur tous les plongements possibles à partir de toutes les surfaces possibles. De telles intégrales de chemin ne sont en général pas bien définies; cependant dans le cas topologique on peut décomposer l'intégrale totale en une somme sur les genres des surfaces sources, et intégrer séparément sur l'espace de modules des plongements holomorphes (modulo transformations conformes de la surface) à partir d'une surface de genre donné. Ce calcul s'interprète mathématiquement comme un problème de géométrie énumérative, c'est-à-dire de théorie de l'intersection sur un espace de modules.

De par sa construction, la théorie de Gromov–Witten a des conséquences importantes en géométrie énumérative. Elle a également permis une formulation rigoureuse du théorème de symétrie miroir, et a des conséquences dans la théorie des systèmes intégrables.

Une première construction a été donnée par Ruan et Tian en géométrie symplectique, utilisant les courbes J-holomorphes de Gromov. Kontsevich et Manin ont ensuite proposé une formulation axiomatique pour la géométrie algébrique, dont la construction a été réalisée par Manin, Behrend et Fantechi. C'est à cette approche que nous nous intéressons ici, en nous limitant au cas du genre nul afin d'éviter les complications qui apparaissent en genre positif (nécessité d'utiliser la classe fondamentale virtuelle pour pallier aux problèmes de dimension de l'espace de modules).

Nous commençons par un chapitre 0 introductif servant de référence pour les éléments de langage de géométrie algébrique et de théorie de l'intersection. Dans le chapitre 1, nous présentons les notions d'espaces de modules et de leur compactification, et nous construisons l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ des courbes stables de genre 0 sur lequel repose l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ des applications stables, le cœur de la théorie, que nous construisons au chapitre 2. Finalement, le chapitre 3 présente de manière plus succincte la théorie de la cohomologie quantique et des variétés de Frobenius.

Chapitre 0

Théorie de l'intersection des variétés algébriques

Dans ce chapitre introductif nous établissons sans preuves les principaux éléments de langage nécessaires au développement qui suit. Une grande partie des constructions présentées ne sont utilisées que pour en introduire d'autres, et n'apparaissent pas dans la suite. La section 0.1 suit [Har77, chapitres I, II] et la section 0.2 suit [Ful98].

0.1 Espaces et morphismes de la géométrie algébrique

0.1.1 La catégorie des variétés algébriques

Variétés algébriques

Fixons k un corps algébriquement clos. On note \mathbb{A}_k^n et \mathbb{P}_k^n respectivement les n -espaces affine et projectif sur k , dont les ensembles de points sont :

$$|\mathbb{A}_k^n| = k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k, 1 \leq i \leq n\}$$

et

$$|\mathbb{P}_k^n| = |\mathbb{A}_k^{n+1}|^* / (v \sim \lambda v, \lambda \in k^*).$$

On utilisera pour \mathbb{P}_k^n les coordonnées homogènes, en écrivant $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ pour la classe représentée par les coordonnées (a_0, \dots, a_n) . Lorsque $k = \mathbb{C}$, ce qui sera le cas dans l'essentiel du développement, on écrira simplement \mathbb{A}^n et \mathbb{P}^n pour $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ et $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

La topologie dite de Zariski sur \mathbb{A}_k^n , puis sur \mathbb{P}_k^n , est définie à l'aide des fonction polynomiales. Les polynômes de $k[X_1, \dots, X_n]$ s'interprètent comme des fonctions sur \mathbb{A}_k^n , et pour une partie $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ on peut définir

l'ensemble algébrique

$$V(S) := \{x \in \mathbb{A}_k^n \mid F(x) = 0 \forall F \in S\} \subset \mathbb{A}_k^n,$$

et qui coïncide avec $V(\mathcal{I}_S)$ où \mathcal{I}_S est l'idéal engendré par S . À toute partie X de \mathbb{A}_k^n on peut associer l'idéal

$$I(X) = \{F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \forall x \in X, F(x) = 0\};$$

on a alors $V(I(X)) = \bar{X}$, l'adhérence de X , et $I(V(S)) = \sqrt{S}$, le radical de S , et d'après le Nullstellensatz d'Hilbert les ensembles algébriques de \mathbb{A}_k^n sont en bijection avec les idéaux de $k[X_1, \dots, X_n]$ égaux à leurs radicaux. En vertu de la stabilité des ensembles algébriques par union finie et intersection quelconque, on définit une topologie sur \mathbb{A}_k^n en donnant les ensembles algébriques comme fermés; on l'appelle **topologie de Zariski**.

Afin de définir la topologie sur l'espace projectif, on considère $k[X_1, \dots, X_n]$ comme un anneau gradué $k[X_1, \dots, X_n] = \bigoplus_d k[X_1, \dots, X_n]_d$ où $k[X_1, \dots, X_n]_d$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré d . Chaque $k[X_1, \dots, X_n]_d$ peut être interprété comme un $k[X_1, \dots, X_n]_0$ -module de fonctions $\mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^1 \cup \{0\}$, et on peut alors définir les ensembles algébriques correspondants aux idéaux homogènes $\mathcal{I} = \bigoplus_d \mathcal{I} \cap k[X_1, \dots, X_n]_d$. On obtient là aussi la topologie de Zariski adéquate sur \mathbb{P}_k^n . On associe encore à une partie X de \mathbb{P}_k^n l'idéal homogène $I(X)$ constitué des polynômes homogènes s'annulant en les points de X . Les ouverts complémentaires des $V(\{x_i\})$ pour $0 \leq i \leq n$ sont homéomorphes à \mathbb{A}_k^n par $(a_0 : \dots : a_n) \rightarrow (a_0/a_i, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n/a_i)$ (où $\hat{\bullet}$ indique l'omission), et l'espace projectif admet donc un recouvrement local par des espaces affines.

Un espace topologique est dit irréductible s'il ne peut pas être écrit comme l'union de deux fermés propres non vides; il en vient que tout ouvert est dense et que deux ouverts quelconques ont une intersection non triviale. Un **variété affine** (resp. **variété projective**) est un fermé irréductible de l'espace affine (resp. de l'espace projectif). Une variété quasi-affine (resp. quasi-projective) est un ouvert d'une variété affine (resp. projective). Une **variété algébrique** (sur k) est une variété affine, quasi-affine, projective, ou quasi-projective.

Fonctions et morphismes de variétés

Soit $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$ une variété quasi-affine. Une fonction $f: Y \rightarrow k$ est dite **régulière** en $x \in Y$ si il existe deux polynômes $g, h \in k[X_1, \dots, X_n]$ et un voisinage U de x dans Y dans lequel h ne s'annule pas et tel que $f = \frac{g}{h}$ sur U . Si $Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$ est une variété quasi-projective, on définit de même les fonctions régulières en ajoutant la condition que g et h soient homogènes de même degré.

On dit qu'une fonction f est régulière sur une variété Y si elle l'est en tout point de Y . L'anneau des fonctions régulières sur $U \subseteq Y$ est noté $\mathcal{O}_Y(U)$. Si Y est un ensemble algébrique dans l'espace affine, l'**anneau de coordonnées** de Y est $A(Y) = k[X_1, \dots, X_n]/I(Y)$, qui est intègre si Y est une variété (affine); on a dans ce cas $\mathcal{O}_Y(Y) \cong A(Y)$. On définit de même l'anneau de coordonnées

homogène pour les variétés projectives avec les idéaux homogènes, mais on a ici $\mathcal{O}_Y(Y) = k$ pour une variété projective Y . En un point $x \in Y$, l'**anneau local** de x , noté $\mathcal{O}_{Y,x}$, est l'anneau des germes de fonctions régulières en x , c'est-à-dire des classes d'équivalence de paires (f, U) où U est un ouvert de Y contenant x et f une fonction régulière sur U , et $(f, U) \sim (f', U')$ ssi $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$.

Soient Y, Y' deux variétés sur k ; un **morphisme de variétés** (ou simplement morphisme) est une fonction continue $\phi: Y \rightarrow Y'$ telle que pour tout ouvert U de Y et toute fonction régulière f sur U , la fonction $f \circ \phi$ sur $\phi^{-1}(U)$ soit régulière. On peut alors définir la catégorie \mathfrak{Var}_k dont les objets sont les variétés sur k et les flèches les morphismes de variétés.

Une **application rationnelle** $Y \rightarrow Y'$ est une classe d'équivalence de paires (ϕ, U) où U est un ouvert non vide de Y et ϕ un morphisme $U \rightarrow Y'$, où $(\phi, U) \sim (\phi', U')$ ssi ϕ et ϕ' sont égaux sur $U \cap U'$. En effet, deux morphismes de variétés sont égaux si leurs restrictions à un ouvert sont égales. En particulier, une **fonction rationnelle** est une classe d'équivalence de paires (ϕ, U) avec ϕ une fonction régulière. On note $R(Y)$ le corps des fonctions rationnelles de Y . En d'autres termes, $R(Y) = \varinjlim_U \mathcal{O}_Y(U)$ où les homomorphismes entre les $\mathcal{O}_Y(U)$ sont les restrictions de fonctions, et pour $x \in Y$ on a une suite d'injections $\mathcal{O}_Y(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,x} \hookrightarrow R(Y)$.

Une application rationnelle est dite **dominante** si l'image de ses représentants est dense dans son codomaine, et les applications rationnelles dominantes forment les morphismes d'une catégorie $\mathfrak{Var}_k^{\text{dom}}$. Une application **birationnelle** est un isomorphisme dans cette catégorie, *i.e.* une application rationnelle dominante $\phi: Y \rightarrow Y'$ admettant une application $\phi^{-1}: Y' \rightarrow Y$ telle que $\phi^{-1} \circ \phi = [(\mathbb{1}_Y, Y)]$ et $\phi \circ \phi^{-1} = [(\mathbb{1}_{Y'}, Y')]$, et on dit que Y et Y' sont birationnellement équivalentes, ou birationnelles, si il existe une application birationnelle de Y dans Y' . En particulier, une **courbe rationnelle projective** est une variété de dimension 1 birationnelle à \mathbb{P}_k^1 .

0.1.2 Faisceaux et schémas

Faisceaux

Soit X un espace topologique; on note \mathfrak{Ouv}_X la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les morphismes les inclusions. Un **préfaisceau** \mathcal{F} à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} est un foncteur contravariant $\mathfrak{Ouv}_X \rightarrow \mathcal{C}$; c'est-à-dire qu'à tout ouvert U il associe un \mathcal{C} -objet $\mathcal{F}(U)$ et à toute inclusion $\iota_{U,V}: V \hookrightarrow U$ une flèche $\text{res}_{U,V} := \mathcal{F}(\iota_{U,V}): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, appelée **restriction**, telle que $\text{res}_{U,U} = \mathbb{1}_U$ et $\text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V} = \text{res}_{U,W}$ pour $W \subset V \subset U$. Si \mathcal{C} est la catégorie des ensembles \mathfrak{Ens} ou une catégorie concrète sur \mathfrak{Ens} , on appelle **sections** sur U les éléments de $\mathcal{F}(U)$, et pour $s \in \mathcal{F}(U)$ on écrit $s|_V := \text{res}_{U,V}(s)$. On écrit aussi $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$. Un morphisme de préfaisceaux est une transformations naturelles des foncteurs. Si $f: X \rightarrow Y$, à un préfaisceau \mathcal{F} sur X on associe un **préfaisceau d'image directe** $f_*\mathcal{F}$ sur Y par $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ pour tout ouvert $U \subset Y$; la règle $\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ s'étend à un foncteur f_* de la catégorie des faisceaux sur X à celle des faisceaux sur Y .

Un préfaisceau \mathcal{F} est un **faisceau** si pour tout recouvrement $\{U_\alpha\}_\alpha$ d'un ouvert U , le diagramme

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod_\alpha \text{res}_{U, U_\alpha}} \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \xrightarrow[\prod_{\beta, \gamma} \text{res}_{U_\beta, U_\beta \cap U_\gamma}]{\prod_{\beta, \gamma} \text{res}_{U_\gamma, U_\beta \cap U_\gamma}} \prod_{\beta, \gamma} \mathcal{F}(U_\beta \cap U_\gamma)$$

représente le premier morphisme comme égalisateur des deux autres, soit $(s|_{U_\alpha} = s'|_{U_\alpha} \forall \alpha) \implies s = s'$ et $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ pour $s_{\alpha, \beta} \in \mathcal{F}(U_{\alpha, \beta})$ implique l'existence de $s \in \mathcal{F}(U)$ avec $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$. Le foncteur d'oubli de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux admet un adjoint à gauche d'objet libre, dit de **faisceautisation**. On note \mathcal{F}^+ l'image d'un préfaisceau \mathcal{F} par ce foncteur, appelé **faisceautisé** de ou faisceau associé à \mathcal{F} .

Un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux est appelé un **espace annelé**; le faisceau, dit **faisceau structural**, est généralement noté \mathcal{O}_X et on écrit $\mathcal{A}\text{nnEsp}$ la catégorie des espaces annelés dont les morphismes sont les couples $(f, f^\#)$ composés d'une fonction $f: X \rightarrow Y$ et d'un morphisme $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$.

Pour $x \in X$, la **tige**, ou fibre, d'un faisceau \mathcal{F} en x est $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$. On appelle **germe** en x , notée s_x , l'image d'une section s par l'application naturelle. Si \mathcal{F} prend ses valeurs dans une catégorie concrète sur $\mathcal{E}\text{ns}$, une germe est une classe d'équivalence de sections définies sur des voisinages de x , où $(s, U) \sim (s', U')$ ssi il existe $V \subset U \cap U'$ tel que $s|_V = s'|_V$. Un **espace localement annelé** est un espace annelé dont la tige en tout point est un anneau local; on note $\mathcal{L}\text{oc}\mathcal{A}\text{nnEsp}$ leur catégorie dont les morphismes sont les $(f, f^\#)$ où $f^\#$ induit des homomorphismes $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ *locaux* sur les tiges.

Schémas

On appelle **spectre** le foncteur $\text{Spec}: \mathcal{C}\mathcal{A}\text{nn}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{L}\text{oc}\mathcal{A}\text{nnEsp}$ qui à tout anneau commutatif A associe l'ensemble $|\text{Spec } A|$ de ses idéaux premiers muni de la topologie de Zariski évidente (en considérant A comme l'ensemble des fonctions sur son spectre) et du faisceau structural $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ dont la tige $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, \mathfrak{p}}$ en $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ est la localisation $A_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ et $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A \setminus V(f)) = A_f = \{1, f, f^2, \dots\}^{-1}A$ pour $f \in A$ (il s'agit bien d'un foncteur car l'image réciproque d'un idéal par un homomorphisme d'anneaux est un idéal, et un homomorphisme $f: A \rightarrow B$ donne bien un morphisme $\text{Spec } f: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$). On note $\mathcal{A}\text{ffSch}$ l'image essentielle de Spec (*i.e.* la sous-catégorie pleine de $\mathcal{L}\text{oc}\mathcal{A}\text{nnEsp}$ dont les objets sont ceux isomorphes à ceux de l'image de Spec), que l'on appelle catégorie des **schémas affines**, et Spec établit une équivalence de catégories $\mathcal{C}\mathcal{A}\text{nn}^{\text{op}} \simeq \mathcal{A}\text{ffSch}$.

Un **schéma** est un espace localement annelé dont tout point admet un voisinage qui est un schéma affine. Un morphisme de schémas est simplement un morphisme de l'espace localement annelé, et on obtient une catégorie $\mathcal{S}\text{ch}$ qui est une sous-catégorie de $\mathcal{L}\text{oc}\mathcal{A}\text{nnEsp}$. De façon équivalente, un schéma affine admet pour hom-foncteur un foncteur représentable sur $\mathcal{C}\mathcal{A}\text{nn}^{\text{op}}$, qui est donc

un faisceau dans la prétopologie de Zariski τ_{Zar} , sous-canonique, où une famille de flèches $\{\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } A\}_i$ est un recouvrement de Zariski si chaque morphisme $\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } A$ est l'inclusion correspondant à la localisation $A \rightarrow A_{a_i}$ à un élément $a_i \in A$ et si il existe une famille $\{f_i \in A\}_i$ telle que $\sum_i f_i a_i = 1$. Un schéma est alors (représentable par) un préfaisceau d'ensembles \mathcal{X} sur le gros site affine de Zariski ($\mathcal{C}\mathcal{A}\text{nn}^{\text{op}} \simeq \mathcal{A}\text{ff}\mathcal{S}\mathcal{c}\mathcal{h}$, τ_{Zar}) qui est un faisceau et admet un recouvrement par des schémas affines (*i.e* il existe une famille $(\mathcal{U}_i = \text{hom}(-, A_i))_i$ de sous-foncteurs de \mathcal{X} ouverts et représentables telle que, pour tout corps k , $\mathcal{X}(k) = \bigcup_i \mathcal{U}_i(k)$), ce qui fait de la catégorie des schémas un topos.

La catégorie des k -variétés admet un foncteur d'inclusion pleinement fidèle dans la catégorie des $\text{Spec } k$ -schémas.

Soit $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ un anneau gradué, et notons $A_+ = \bigoplus_{d > 0} A_d$. On définit alors $|\text{Proj } A|$ comme l'ensemble des idéaux premiers homogènes de A qui ne contiennent pas A_+ . On peut alors, de façon similaire à ce qui a été fait pour le foncteur Spec , donner une structure de schéma à $\text{Proj } A$. Pour tout anneau A , on définit le n -espace projectif \mathbb{P}_A^n sur A comme $\text{Proj } A[X_0, \dots, X_n]$, et on a $\mathbb{P}_A^n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } A$. On définit donc, pour tout schéma S , le n -espace projectif sur S , $\mathbb{P}_S^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$.

Faisceaux de modules

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Un **faisceau de \mathcal{O}_X -modules**, ou simplement **\mathcal{O}_X -module**, est un faisceau \mathcal{F} dont $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$ -module pour tout ouvert $U \subset X$, et tel que l'action $\alpha_U: \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ commute avec les morphismes de restriction : $\alpha_V \circ (\text{res}_{U,V}^{\mathcal{O}_X} \times \text{res}_{U,V}^{\mathcal{F}}) = \text{res}_{U,V}^{\mathcal{F}} \circ \alpha_U$ pour $V \subset U$; en particulier la tige \mathcal{F}_x en x est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module.

Soit $\text{Spec } A$ un schéma affine, et M un A -module. On peut définir sur $\text{Spec } A$ un $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -module \widetilde{M} tel que $\widetilde{M}_p = M_p = [A \setminus p]^{-1} M$ et $\widetilde{M}(\text{Spec } A \setminus V(f)) = M_f$. En particulier, $\mathcal{O}_{\text{Spec } A} = \widetilde{A}$. Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} sur un schéma X est dit **quasicohérent** si, pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } A \subset X$, il existe un A -module M (qui est $\mathcal{F}(U)$) tel que $\mathcal{F}|_U$ soit isomorphe à \widetilde{M} . Il est en outre **cohérent** si M est de type fini. Finalement, un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est **localement libre** de rang r si X admet un recouvrement affine par des U_α tel que pour tout α , $\mathcal{F}|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}^{\oplus r}$. La donnée d'un faisceau localement libre est équivalente à celle d'un fibré vectoriel de même rang, et nous identifierons toujours les deux points de vue. Un faisceau localement libre \mathcal{F} de rang 1 est dit **inversible**; en effet $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{O}_X$ pour \mathcal{F}^\vee le dual.

Sur $X = \text{Proj } A$, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A_0$, et l'information sur les parties de degré plus élevé est perdue. On définit alors $\mathcal{O}_X(d) := \widetilde{A[d]}$, où $[d]$ est le décalage $(A[d])_k = A_{k+d}$; alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) = A_d$. On définit pour tout faisceau de modules \mathcal{F} son faisceau tordu $\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(d)$, et on a bien $\mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{O}_X(b) = \mathcal{O}_X(d+b)$. Le faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ est appelé faisceau tordu de Serre.

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces topologiques. Le foncteur f_* admet un adjoint noté f^{-1} de la catégorie des préfaisceaux sur Y dans celle des

préfaisceaux sur X ; on s'intéressera à sa restriction à la sous-catégorie des faisceaux sur Y , dont l'image est dans la catégorie des faisceaux sur X . Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_Y -module, alors $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas a priori un \mathcal{O}_X -module, et on définit plutôt le faisceau d'**image inverse** $f^*\mathcal{F}$ comme $f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$.

Soit \mathcal{A} un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -algèbres sur X . Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } R$ de X , on a un homomorphisme de structure $\mathcal{O}_X(U) \cong R \rightarrow \mathcal{A}(U)$, donnant un morphisme $\text{Spec } \mathcal{A}(U) \rightarrow \text{Spec } R = U$. Par recollement on obtient un schéma $\text{Spec } \mathcal{A}$, appelé **spectre global** ou **spectre relatif** de \mathcal{A} , muni d'un morphisme $f: \text{Spec } \mathcal{A} \rightarrow X$ tel que $f^{-1}(U) = \text{Spec } \mathcal{A}(U)$ pour tout ouvert affine U et que pour $U \subset V$, le morphisme $f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(V)$ corresponde à la restriction $\mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$. Si \mathcal{A} est une \mathcal{O}_X -algèbre graduée telle que $\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{O}_X$ et que \mathcal{A} est localement généré par \mathcal{A}_1 qui est cohérent, on appelle $\text{Spec } \mathcal{A}$ un **cône** sur X . On définit de même $\text{Proj } \mathcal{A} =: \mathbb{P}(\text{Spec } \mathcal{A})$ pour \mathcal{A} une \mathcal{O}_X -algèbre graduée.

0.1.3 Propriétés des schémas et de leurs morphismes, sous-variétés

Points et espaces des variétés et schémas

Un **point générique** d'un fermé irréductible Z est un point ζ qui est dense dans Z , soit dont l'adhérence $\overline{\{\zeta\}}$ est égale à Z . Tout schéma est un espace topologique sobre, c'est-à-dire que chaque fermé irréductible admet un unique point générique. On appelle **point fermé** un point ξ , tel que $\{\xi\}$ soit un fermé, et toute variété est homéomorphe à l'ensemble des points fermés du schéma lui correspondant.

Pour un anneau local A d'idéal maximal \mathfrak{m} et corps résiduel $\kappa = A/\mathfrak{m}$, le quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un κ -espace vectoriel. On dit que A est **régulier** si $\dim_{\kappa} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$, où $\dim A$ est la longueur de la plus longue chaîne d'idéaux. Une variété X est **non singulière** au point $x \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, et X est **régulière** si elle est régulière en tout point, et singulière sinon.

Un espace topologique est dit **noethérien** si toute suite décroissante $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ de fermés est stationnaire, i.e. il existe r tel que $X_r = X_{r+1} = \dots$. Tout fermé non vide d'un espace noethérien peut se décomposer de façon unique en ses composantes irréductible. Un schéma X est localement noethérien si il admet un recouvrement affine dont chaque spectre est celui d'un anneau noethérien. Il est dit **noethérien** si le nombre d'ouverts affines du recouvrement peut être fini, ou de façon équivalente si il est localement noethérien et quasi-compact. L'espace sous-jacent d'un schéma noethérien est noethérien, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Un schéma X est **réduit** si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ n'a pas de nilpotents, où de façon équivalentes les tiges $\mathcal{O}_{X,x}$ n'en ont pas. Un schéma X est **intègre** si il est réduit et irréductible, ou de façon équivalente si chaque $\mathcal{O}_X(U)$ est un anneau intègre.

Dimension et sous-variétés

La **dimension** d'un schéma, ou d'une variété, X , est sa dimension en tant qu'espace topologique, c'est-à-dire la longueur n de la plus longue chaîne $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n$ de fermés irréductibles de X distincts. Pour les schémas affines, on a $\dim \operatorname{Spec} A = \dim A$. Un schéma est dit **purement de dimension** n si toutes ses composantes irréductibles sont de dimension n .

Si Z est une partie irréductible de X , sa **codimension** $\operatorname{codim}_X Z$ est la longueur de la plus longue chaîne $\bar{Z} = Z_0 \subset \dots \subset Z_n$ de fermés irréductibles de X distincts. Si η est le point générique de Z , alors $\operatorname{codim}_X Z = \dim \mathcal{O}_{X,\eta}$. Si X est une variété, on a $\dim Z + \operatorname{codim}_X Z = \dim X$.

Un **sous-schéma** ouvert d'un schéma X est un schéma dont l'espace sous-jacent est un ouvert de celui de X et dont le faisceau structural est isomorphe à la restriction de celui de X . Une **immersion ouverte** de schémas est un morphisme $(f, f^\#): X \rightarrow Y$ qui induit un isomorphisme de X avec un sous-schéma ouvert de Y , ou de façon équivalente tel que f soit un homéomorphisme sur son image (dans le langage de la sous-section 1.2.2, un plongement) et que $f^\#$ soit un isomorphisme sur la restriction du faisceau structural de Y . Une **immersion fermée** est un morphisme $(f, f^\#): X \rightarrow Y$ tel que f soit un plongement sur un fermé de Y et $f^\#$ une surjection. Un **sous-schéma fermé** de X est une classe d'équivalence d'immersions fermées où $(f: Z \rightarrow X) \sim (f': Z' \rightarrow X)$ si il existe un isomorphisme $\alpha: Z' \xrightarrow{\sim} Z$ tel que $f' = f \circ \alpha$. Une **sous-variété** d'un schéma est un sous-schéma qui est une variété (la notion sera raffinée à la fin de la sous-section lorsque nous introduirons la notion de variété abstraite).

Décrivons pour finir la correspondance entre les sous-schémas fermés et les faisceaux quasi-cohérents d'idéaux. Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine et i un idéal de A . Le morphisme canonique $A \rightarrow A/i$ donne dualement un morphisme $\operatorname{Spec} A/i \rightarrow \operatorname{Spec} A$, qui est une immersion fermée. Son image est le support du faisceau d'idéaux \mathcal{O}_S/\tilde{i} . On généralise en associant à tout faisceau quasi-cohérent d'idéaux \mathcal{J} sur un schéma X le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, qui est un sous-schéma fermé. À l'inverse, si $\iota: U \rightarrow X$ est une immersion fermée, on lui associe le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_U := \ker \iota^\#: \mathcal{O}_X \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_U$.

Schémas de base

Soit S un schéma fixé; on s'intéresse aux **schémas sur S** , objets de la catégorie \mathfrak{Sch}/S sont les objets sont les $f: X \rightarrow S$ et les morphismes $\operatorname{hom}_{\mathfrak{Sch}}(X, S) \ni f \rightarrow$

$f' \in \operatorname{hom}_{\mathfrak{Sch}}(X', S)$ les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & S & \end{array} .$$

On appelle

f le **morphisme de structure** de X , et on le laisse généralement implicite, disant par abus que X est un schéma sur S . Si $S = \operatorname{Spec} A$, on fera également l'abus de parler de schémas sur A .

Si l'on se donne un S -schéma S' , pour tout autre S -schéma X on pourra considérer le S' -schéma $X' := X \times_S S'$, que l'on dit obtenu par **extension de base**. Plu-

tôt que de s'intéresser aux propriétés absolues des schémas, on s'intéresse aux propriétés de leurs morphismes, et l'on dira qu'un S -schéma a une certaine propriété si son morphisme de structure l'exhibe; il est également utile de savoir quelles propriétés sont conservées par extension de base.

Morphismes

Un morphisme **projectif** est un morphisme $f: X \rightarrow Y$ qui se décompose comme une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y^n$ suivie de la projection canonique $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ pour un certain n . Un morphisme quasi-projectif se décompose en une immersion ouverte suivie par un morphisme projectif. Un k -schéma X est **projectif** si son morphisme structural $X \rightarrow \text{Spec } k$ l'est.

Un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est **localement de type fini** si il existe un recouvrement affine $\{V_i = \text{Spec } B_i\}_i$ de Y tel que pour tout i , $f^{-1}(V_i)$ admette un recouvrement affine $\{U_{ij} = \text{Spec } A_{ij}\}_j$ avec chaque A_{ij} une B_i -algèbre de type fini. On dit que f est **de type fini** si il est localement de type fini et chaque $f^{-1}(V_i)$ admet un recouvrement par un nombre fini de U_{ij} . On dit en outre que f est **fini** si chaque $f^{-1}(V_i)$ est égal à $\text{Spec } A_i$ avec A_i une B_i -algèbre finie, c'est-à-dire qui est un B_i -module de type fini.

Un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est **séparé** si son morphisme diagonal $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$ défini par $\pi_1 \circ \Delta_f = \pi_2 \circ \Delta_f = \text{id}_X$ (où $\pi_{1,2}: X \times_Y X \rightarrow X$ sont les projections naturelles) est une immersion fermée, ou de façon équivalente si l'image de Δ_f est un fermé. Un schéma est séparé si il est séparé sur l'objet final $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

Un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est dit **universellement fermé** si il est fermé et si pour tout Y -schéma Y' le morphisme $f': X' \rightarrow Y'$ obtenu par extension de base est fermé. Un morphisme est **propre** si il est séparé, de type fini, et universellement fermé.

Si A est un anneau, un A -module M est dit **plat** si le foncteur $M \otimes_A -: N \mapsto M \otimes_A N$ est exact, *i.e.* préserve les suites exactes. Un homomorphisme d'anneaux $A \rightarrow B$ est plat si il exhibe B comme un A -module plat. Un morphisme de schémas $f: X \rightarrow Y$ est **plat** en $x \in X$ si l'homomorphisme $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est plat, et f est plat si il l'est en tout point. Si X et Y sont de type fini sur k , alors $\dim \mathcal{O}_{X_f(x),x} = \dim \mathcal{O}_{X,x} - \dim \mathcal{O}_{Y,f(x)}$, et en particulier si Y est irréductible et X est purement de dimension $\dim Y + n$ alors chaque fibre X_y est purement de dimension n . On dit alors que f est de **dimension relative** n . Tous les morphismes plats seront par la suite supposés de dimension relative n .

Une **variété abstraite** est un schéma intègre de type fini sur un corps. Dans la suite, lorsque nous parlerons de variétés, il sera sous-entendu qu'il s'agit de variétés abstraites. Une sous-variété d'un k -schéma de type fini est un sous-schéma qui est une variété, *i.e.* un sous-schéma intègre.

0.1.4 Éclatements

Nous n'aurons besoin dans la suite que de l'éclatement d'une variété en un point, et y limiterons donc l'exposition. Si un point présente des singularités car

il contient trop d'informations, l'éclatement permet de les résoudre en remplaçant le point par les directions qui y passent. Toute variété étant recouverte par des espaces affines, il suffit de définir les éclatements dans \mathbb{A}_k^n , et par simplicité de notation nous considérerons l'éclatement en 0 (un autre point pouvant être éclaté à l'aide d'une simple translation linéaire).

Soit donc $X = \mathbb{A}_k^n$. On définit $\tilde{X} \in X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ l'**éclatement** de X en 0 comme le fermé de $X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ défini par les polynômes

$$\{x_i y_j - x_j y_i\}_{1 \leq i, j \leq n}$$

où $(y_1 : \dots : y_n)$ sont les coordonnées homogènes de \mathbb{P}_k^{n-1} et les polynômes cités sont bien homogènes en les y_i . L'éclatement \tilde{X} bénéficie naturellement d'un morphisme $\beta: \tilde{X} \rightarrow X$ donné comme la restriction $\beta := \text{pr}_1|_{\tilde{X}}$ de la projection $\text{pr}_1: X \times \mathbb{P}_k^{n-1} \rightarrow X$. Si Y est une sous-variété de X , on définit son éclatement \tilde{Y} en 0 comme

$$\tilde{Y} = \overline{\beta^{-1}(Y \setminus \{0\})}$$

et on écrira aussi β pour l'application $\tilde{Y} \rightarrow Y$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \beta^{-1}(X \setminus \{0\})$, par exemple $\beta^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ est tel que $x_i \neq 0$, alors pour tout j on a $y_j = \frac{x_j}{x_i} y_i$, et en particulier en choisissant le représentant $y_i = x_i$, on obtient $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$. Donc $\beta^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ consiste d'un unique point $((x_1, \dots, x_n), (x_1 : \dots : x_n))$, et $X \setminus \{0\} \cong \tilde{X} \setminus \beta^{-1}(0)$.

Si $x \in \beta^{-1}(0)$, les équations $x_i y_j = x_j y_i$ deviennent simplement $0 = 0$, et il n'y a pas de contrainte sur les y_i , donc $\beta^{-1}(0) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$. On interprète généralement l'espace projectif comme l'espace des directions dans \mathbb{A}_k^n ; ici $\beta^{-1}(0)$ peut être vu comme l'espace des lignes de X passant par 0. Une ligne L dans X est donnée par n équations paramétriques $x_i = a_i t$ avec le paramètre $t \in \mathbb{A}_k^1$ et la direction $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$. Son image réciproque $\tilde{L} = \beta^{-1}(L \setminus \{0\})$ est alors constituée des points $((a_1 t, \dots, a_n t), (a_1 t : \dots : a_n t)) = ((a_1 t, \dots, a_n t), (a_1 : \dots : a_n))$. Donc \tilde{L} consiste en le point de \mathbb{P}_k^{n-1} de coordonnées données par la direction de L , auquel est attaché la ligne percée $L \setminus \{0\}$.

Les équations paramétrant \tilde{L} sont aussi bien définies pour $t = 0$, donnant $x_i = 0, y_i = a_i$. Le point ainsi obtenu est le point d'adhérence de \tilde{L} manquant à son adhérence $\tilde{\tilde{L}}$, qui coupe alors $\beta^{-1}(0)$ en $(0, (a_1 : \dots : a_n))$ comme vu au dessus. Il en vient que $\beta^{-1}(0)$ est dense dans \tilde{X} (qui est donc irréductible). On retrouve $\tilde{X} = \overline{\beta^{-1}(X \setminus \{0\})}$, et la définition de l'éclatement d'une sous-variété est bien justifiée.

Le morphisme d'éclatement β induit un isomorphisme $\tilde{X} \setminus \beta^{-1}(0) \cong X \setminus \{0\}$; en particulier l'application rationnelle correspondant à la classe de $(\beta|_{\tilde{X} \setminus \beta^{-1}(0)}, \tilde{X} \setminus \beta^{-1}(0))$, qui est dominante, admet pour inverse la classe de $(\beta^{-1}|_{X \setminus \{0\}}, X \setminus \{0\})$ (où $\beta^{-1}|_{X \setminus \{0\}}$ est bien définie de la manière évidente) et est donc une application birationnelle $\tilde{X} \xrightarrow{\sim} X$. Le \mathbb{P}_k^{n-1} correspondant à $\beta^{-1}(0)$ est appelé le **diviseur exceptionnel**.

0.2 Groupe de Chow, cycles et classes d'intersection

0.2.1 Cycles et équivalences rationnelles

Un ℓ -cycle, pour $\ell \in \mathbb{N}$ (et en fait $\ell \leq n$, où $n = \dim(X)$), est une somme formelle $\sum_{i \in I} n_i [V_i]$ de sous-variétés V_i de dimension ℓ de X avec coefficients n_i dans \mathbb{Z} . L'ensemble des ℓ -cycles de X , c'est-à-dire le groupe abélien engendré par les sous-variétés ℓ -dimensionnelles de X , est noté $Z_\ell X$, et on écrit $Z_\bullet X := \bigoplus_\ell Z_\ell X$ pour l'ensemble des cycles de X . En particulier, $Z_{n-1} X$ est le groupe des diviseurs de X .

Un A -module M de type fini, pour A un anneau commutatif, est dit de longueur finie si il existe une chaîne de sous-modules $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r = M$ telle que $M_{i+1}/M_i \cong A/\mathfrak{p}_i$ avec \mathfrak{p}_i un idéal maximal de A ; la longueur r d'une telle chaîne est indépendante du choix de la chaîne, et on l'appelle **longueur** du A -module M , dénotée $l_A(M)$. Si X est une variété, V une sous-variété de X de codimension 1 et $r \in \mathcal{O}_{X,V}$, l'**ordre** de r suivant V est

$$\text{ord}_V(r) := l_{\mathcal{O}_{X,V}}(\mathcal{O}_{X,V}/(r)).$$

Si X est un schéma et V une sous-variété de X de dimension $k+1$, une fonction rationnelle $r \in \mathbb{R}(V)^*$ définit un diviseur $[\text{div}(r)]$ sur W , c'est-à-dire un k -cycle de X , par

$$[\text{div}(r)] = \sum_{\text{codim}_V W=1} \text{ord}_V(r)[V].$$

Un k -cycle α de X est alors dit **rationnellement équivalent à zéro** si il existe une décomposition $\alpha = \sum_{r_i \in \mathbb{R}(V_i)^*} [\text{div}(r_i)]$ pour un nombre fini de sous-variétés V_i de dimension $k+1$. Le sous-groupe de $Z_k X$ constitué des cycles rationnellement équivalents à zéro est écrit $\text{Rat}_k X$, et on définit le quotient $A_k X := Z_k X / \text{Rat}_k X$.

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre; l'image $f(V)$ d'une sous-variété $V \subset X$ est une sous-variété fermée de Y dont l'inclusion induit une inclusion de $\mathbb{R}(f(V))$ dans $\mathbb{R}(V)$, faisant si $\dim f(V) = \dim V$ de $\mathbb{R}(V)$ une extension de corps finie de $\mathbb{R}(f(V))$. On définit alors $\deg_f(V)$ par $\deg_f(V) = 0$ si $\dim f(V) < \dim V$ et $\deg_f(V) = [\mathbb{R}(f(V)) : \mathbb{R}(V)]$ si les dimensions coïncident. Le **cycle d'image directe** de $[V]$ par f est alors $f_*[V] := \deg_f(V)[f(V)]$, ce qui se prolonge linéairement pour donner un homomorphisme dit d'image directe ou de poussée-avant selon f , noté $f_*: Z_k X \rightarrow Z_k Y$, de façon fonctorielle (*i.e.* $(gf)_* = g_* f_*$). L'image directe d'un cycle rationnellement équivalent à zéro est également équivalente à zéro, donc la poussée-avant passe au quotient, et A_\bullet est un foncteur $\mathcal{V}\text{ar}^{\text{prop}} \rightarrow \mathcal{A}\text{bGrp}$ de la catégorie des variétés avec les morphismes propres dans celles des groupes abéliens, donnant $A_\bullet(X \xrightarrow{f} Y) = A_\bullet X \xrightarrow{f_*} A_\bullet Y$.

Soit à l'inverse $f: X \rightarrow Y$ un morphisme plat de dimension relative n . Pour toute sous-variété $V \subset Y$, on pose $f^*[V] := [f^{-1}(V)]$, ce qui s'étend linéairement à des homomorphismes $f^*: Z_k Y \rightarrow Z_{k+n} X$. L'homomorphisme passe au quotient par $\text{Rat}_k Y$, et on obtient donc un homomorphisme dit d'**image inverse** ou tiré-arrière $f^*: A_k Y \rightarrow A_{k+n} X$. Soit $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel de rang r ; le tiré-arrière

selon π est un isomorphisme $\pi^*: A_{k-r}X \rightarrow A_k E$, et en notant ζ la section zéro de E on définit un homomorphisme de Gysin $\zeta^* := (\pi^*)^{-1}$.

Soient X_1, \dots, X_t les composantes irréductibles du schéma quelconque (noethérien) X ; on définit le **cycle fondamental** de X comme $[X] = \sum_{i=1}^t l_{\mathcal{O}_X, X_i} [X_i]$. Si X est purement de dimension n , alors $[X] \in Z_n X$. En particulier, si X est irréductible, alors $Z_n X \cong \mathbb{Z}$ et un morphisme $f: X \rightarrow Y$ entre deux schémas irréductibles de même dimension n aura un homomorphisme d'image directe $f_*: Z_n X \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cong Z_n Y$ caractérisé entièrement par son degré d défini par $f_*(i) = di$. On appelle **classe fondamentale** de X , aussi notée $[X]$, l'image du cycle fondamentale dans $A_* X$.

0.2.2 Diviseurs, faisceaux inversibles et classes de Chern

Pour tout ouvert $U \subset X$, écrivons $K(U)$ la localisation de $\mathcal{O}_X(U)$ au système multiplicatif des sections régulières, c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{O}_X(U)$ qui ne sont pas des diviseurs de zéro; il s'agit de l'anneau quotient total de $\mathcal{O}_X(U)$. L'association $U \mapsto K(U)$ forme un préfaisceau sur X , et son faisceautisé $\mathcal{K}_X := (U \mapsto K(U))^+$ est appelé le **faisceau des fonctions méromorphes** sur X . On note \mathcal{K}_X^* et \mathcal{O}_X^* respectivement les sous-faisceaux de sections inversibles de \mathcal{K}_X et \mathcal{O}_X .

Un **diviseur de Cartier** sur X est une section *globale* du faisceau quotient $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. On peut donc représenter un diviseur de Cartier par la donnée d'un recouvrement $\{U_i\}_i$ de X et d'une section $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$ pour chaque i telle que, sur toute intersection $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le quotient $f_i|_{U_i \cap U_j} / f_j|_{U_i \cap U_j}$ soit un élément de $\mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. À un diviseur de Cartier D représenté par $\{(U_i, f_i)\}_i$ on associe le sous- \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X(D)$ de \mathcal{K}_X en spécifiant que $\mathcal{O}_X(D)(U_i)$ soit engendré par $1/f_i$ pour tout i . Il s'agit d'un faisceau inversible.

Si X est une variété, on peut associer à tout diviseur de Cartier D un **diviseur de Weil**, c'est-à-dire un élément du groupe $Z_{n-1} X$ généré par les sous-variétés de codimension 1. Il s'agit simplement de $\text{div}(f)$ ou par f on entend que dans la somme sur les sous-variétés, toutes les f_i sur des U_i d'intersection non triviale avec la sous-variété considérée donnent la même valeur, car les fonctions de transition f_i/f_j étant inversible elles ont un ordre de 0. Cette procédure est inversible, et donc sur une variété la donnée d'un diviseur de Cartier est équivalente à celle d'un diviseur de Weil.

Un diviseur de Cartier D est dit **effectif** si il peut être représenté par une famille $\{(U_i, f_i)\}_i$ dont chaque f_i est un élément de $\mathcal{O}_X(U_i)$. Le faisceau d'idéaux (principaux) \mathcal{I}_D localement généré par les f_i définit un sous-schéma (localement principal) Z_D . Le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ est alors $\mathcal{I}_D^{\otimes -1} = \mathcal{I}_D^\vee$. Ce faisceau d'idéaux admet une section canonique s dont Z_D est le schéma zéro.

0.2.3 Le produit d'intersection

Soit U un sous-schéma de X , et notons \mathcal{I} son faisceau d'idéaux. Le **cône normal** $C_{U/X}$ de X dans Y est $\text{Spec} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \right)$. On dit qu'une immersion fermée $\iota: U \rightarrow X$ est régulière de codimension d , si tout point de U admet un

voisinage affine V dans X tel que l'idéal de X dans l'anneau de coordonnées A de U soit engendré par une suite régulière (une suite d'éléments a_i de A telle que a_i ne soit pas un diviseur de zéro dans $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$) de longueur d . Dans ce cas, le fibré normal $N_{U/X} = \text{Spec Sym}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ est isomorphe à $C_{U/X}$.

Soit $\iota: U \rightarrow X$ une immersion régulière de codimension d , de faisceau d'idéaux \mathcal{J} et fibré normal $N_{U/X}$. Soit également $f: V \rightarrow X$ un morphisme, avec V purement de dimension k . Soit $\text{pr}_1: U \times_X V = f^{-1}(U) \rightarrow U$ la projection canonique; alors $\text{pr}_1^* N_{U/X}$ (où pr_1^* est l'image inverse de faisceaux étendue au spectre global et non l'image inverse de cycle) est un fibré vectoriel de rang d sur $U \times_X V$, de projection notée $\pi: \text{pr}_1^* N_{U/X} \rightarrow U \times_X V$. Le cône normal $C_{f^{-1}(U)/V}$ se plonge alors comme sous-cône fermé du fibré $\text{pr}_1^* N_{U/X}$, et est purement de dimension k . Il détermine alors un k -cycle $[C_{f^{-1}(U)/V}] \in A_k(\text{pr}_1^* N_{U/X})$. En notant ζ la section zéro de $\text{pr}_1^* N_{U/X}$, et $\zeta^*: A_k(\text{pr}_1^* N_{U/X}) \rightarrow A_{k-d}(U \times_X V)$ l'homomorphisme de Gysin associé, on définit le **produit d'intersection** $[U] \cdot [V]$ de U par V sur X par :

$$[U] \cdot [V] = \zeta^* [C_{f^{-1}(U)/V}] \in A_{k-d}(f^{-1}(U) = U \times_X V).$$

Dans la situation précédente, on peut étendre le produit d'intersection à un homomorphisme $\iota^!: Z_\ell V \rightarrow A_{k-d}(U \times_X V)$ par $\iota^!(\sum n_i [V_i]) = \sum n_i [U] \cdot [V_i]$. Cet homomorphisme passe au quotient par $\text{Rat}_k V$, et on a un homomorphisme de Gysin raffiné $\iota^!: A_k V \rightarrow A_{k-d}(U \times_X V)$, que par abus on appellera également **produit d'intersection** $\beta = \sum n_i [V_i] \mapsto [U] \cdot \beta$.

0.2.4 Anneau de Chow, cap- et cup-produits

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme. On définit pour $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A^p(X \xrightarrow{f} Y)$ des **p-classes bivariantes**, dont les éléments sont des collections d'homomorphismes

$$\left\{ c_g^{(k)}: A_k Y' \rightarrow A_{k-p} \left(X' = X \underset{f, Y, g}{\times} Y' \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}, g: Y' \rightarrow Y}$$

respectant des conditions de compatibilité que nous n'explicitons pas avec les images directe et inverse et avec le produit d'intersection.

Pour $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, on a pour $p, q \in \mathbb{Z}$ un homomorphisme $A^p(f) \otimes A^q(g) \rightarrow A^{p+q}(g \circ f)$, $c \otimes d \mapsto c \cdot d$ donné par $c \cdot d(\alpha) = c(d(\alpha)) \in A_{k-p-q}(X \times_Y (Y \times_Z Z'))$ pour $\alpha \in A_k Z'$ et $Z' \rightarrow Z$. On a aussi, si f est propre, un homomorphisme d'image directe $f_*: A^p(g \circ f) \rightarrow A^p(g)$ pour tout p , ainsi que, pour $f: X \rightarrow Y$ quelconque et $h: Y' \rightarrow Y$, un homomorphisme d'image inverse $h^*: A^p(f) \rightarrow A^p(X \times_Y Y' \rightarrow Y')$.

Le p -ième groupe de cohomologie de X est $A^p X := A^p(\mathbb{1}_X)$. Le composé $X \xrightarrow{\mathbb{1}_X} X \xrightarrow{\mathbb{1}_X} X$ donne un produit $\smile: A^p X \otimes A^q X \rightarrow A^{p+q} X$, $c \otimes d \mapsto c \smile d := c \cdot d$, appelé le **cup-produit**. La somme directe $A^\bullet X = \bigoplus_p A^p X$ a alors une structure d'anneau gradué, appelé l'**anneau de Chow**. L'évaluation $A^p X \otimes A_q X \rightarrow A_{p-q} X$ est notée \frown , soit $c \otimes \alpha \mapsto c(\alpha) := c \frown \alpha$, et appelée le **cap-produit**.

Si X est une variété non singulière de dimension n , alors $A^p X = A_{n-p} Y$. Le cap-produit est alors donné par $\alpha \frown \beta = \Delta^!(\alpha \times \beta)$ ou $\alpha \times \beta$ vient du produit $[U] \times [V] = [U \times V] \in A_\bullet(X \times X)$ et $\Delta^!$ est l'homomorphisme de Gysin raffiné associé au morphisme diagonal Δ .

Pour un schéma X quelconque de morphisme structural $s: X \rightarrow \text{Spec } k$ propre et un $\alpha = \sum_x n_x [x] \in A_0 X$, on définit

$$\int_X \alpha = \alpha \frown [X] := s_* \alpha = \sum_x n_x [R(x) : k] \in \mathbb{Z} \cong A_0 \text{Spec } k,$$

aussi appelé degré de α .

Remarque 0.1. Si X est une variété non singulière *complexe*, il y a alors un isomorphisme $A^\bullet X \cong H_{\text{BM}}^\bullet X$ avec la cohomologie de Borel-Moore, la cohomologie du complexe singulier à support localement fini, avec doublement du degré : $A^p X = H_{\text{BM}}^{2p} X$. Si en outre X est une variété différentielle compacte, les cohomologies de Borel-Moore, singulière et de de Rham coïncident, et en particulier le cap-produit $\int: H^{2n}(X) \times H_{2n}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ correspond bien à l'intégration d'une forme volume.

Chapitre 1

Espace de modules des courbes stables

1.1 Familles universelles et espaces de modules

Étant donné un schéma de base B , on définit simplement une **famille** sur B comme un morphisme $X \rightarrow B$. On impose généralement une condition de cohérence supplémentaire en requérant une certaine structure commune sur toutes les fibres $X_b = X \times_B \{b\}$. On a alors une famille d'objets du type demandés paramétrés par les points de B . Un espace de modules pour une certaine structure est un schéma dont les points paramètrent tous les objets exhibant cette structure, et dont la famille tautologique a alors un rôle de famille universelle.

1.1.1 Espaces de modules fins

Ayant fixé la structure t que l'on cherche à classifier, on forme un foncteur de problème de module $\mathcal{M}_t : \mathcal{S}ch^{op}/k \rightarrow \mathcal{E}ns$ de la catégorie des schémas sur k dans la catégorie des ensembles en donnant :

- pour un schéma B , l'ensemble $\mathcal{M}_t(B)$ est l'ensemble des familles de type t sur B , possiblement à une relation d'équivalence près ;
- pour un morphisme $f: B' \rightarrow B$, en notant $f^*: \mathcal{M}_t(B) \rightarrow \mathcal{M}_t(B')$ pour $\mathcal{M}_t(f)$, on définit pour toute (classe de) famille(s) $[X] \in \mathcal{M}_t(B)$ la famille $f^*[X]$ de $\mathcal{M}_t(B')$ comme tiré-arrière de $[X]$ selon f , soit comme le produit fibré $f^*[X] = [X] \times_B B'$.

Définition 1.1 (Espace de modules fin). Un **espace de modules fin** pour le problème de modules donné par le foncteur \mathcal{M}_t est un schéma représentant \mathcal{M}_t , c'est-à-dire un schéma \mathcal{M}_t muni d'un isomorphisme naturel $\phi: \mathcal{M}_t \xrightarrow{\cong} \text{hom}(-, \mathcal{M}_t)$.

Pour tout k -schéma B , la composante $\phi_B: \mathcal{M}_t(B) \rightarrow \text{hom}(B, \mathcal{M}_t)$ donne pour toute famille $[X] \rightarrow B$ un morphisme $\phi_B(X): B \rightarrow \mathcal{M}_t$ associant à tout

point $b \in B$ un point $\phi_B(X)(b)$ de \mathcal{M}_t , appelé un **module**, qui correspond alors à l'objet fibre $[X_b]$. Chaque point de \mathcal{M}_t est alors un module correspondant à un objet de la structure t , et on obtient tautologiquement une famille τ sur \mathcal{M}_t dont la fibre en tout point est l'objet paramétré par ce point (τ dépend du choix de la représentation ϕ , ce qui est normal car la paramétrisation par \mathcal{M}_t en dépend également) en définissant $\phi_{\mathcal{M}_t}(\tau) = \mathbb{1}_{\mathcal{M}_t}$, ce qui a du sens par le lemme de Yoneda.

Propriété 1.1. *La famille tautologique sur \mathcal{M}_t est une famille universelle : toute famille sur un k -schéma B est le tiré-arrière de la famille tautologique selon une flèche unique de $\text{hom}(B, \mathcal{M}_t)$.*

Démonstration. Soit $\pi: [X] \rightarrow B$ une famille. On a naturellement le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & & \tau \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_t \\ B & \xrightarrow{\phi_B(X)} & \mathcal{M}_t \end{array}$$

Les points d'une fibre X_b sont envoyés par $\phi_B(X) \circ \pi: X \rightarrow B \rightarrow \mathcal{M}_t$ en $[X_b]$. On peut donc obtenir un diagramme commutatif en complétant la flèche du haut par $\phi_B(X)_*: X \rightarrow \tau$ qui à toute fibre X_b fera correspondre la fibre sur l'objet $[X_b]$ de \mathcal{M}_t , que l'on identifie à (une copie de) X_b .

Soit maintenant $\pi_Y: Y \rightarrow B$ une autre famille munie d'un morphisme μ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\mu} & \tau \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_t \\ B & \xrightarrow{\phi_B(X)} & \mathcal{M}_t \end{array}$$

Soient $b \in B$ et $y \in Y_b =: \pi_Y^{-1}(b)$. On a $(\phi_B(X) \circ \pi_Y)(y) = \phi_B(X)(b) = [X_b]$ donc $\mu(y) \in [X_b]$, et $\mu(Y_b) \subset X_b$. Les morphismes de Y se prolongent donc en le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Y & & \xrightarrow{\mu} & & \tau \\ & \searrow \mu & & \nearrow \mu & \\ & X & \xrightarrow{\phi_B(X)_*} & & \tau \\ & \pi \downarrow & & & \downarrow \pi_t \\ & B & \xrightarrow{\phi_B(X)} & & \mathcal{M}_t \end{array} ,$$

et le prolongement est déterminé de façon unique par le choix de μ , donc X a la propriété universelle du produit fibré $B \times_{\mathcal{M}_t} \tau$, et il y est isomorphe de façon unique. \square

Remarque 1.1. La démonstration que nous avons donné utilise la caractérisation géométrique de τ qui suppose que ses fibres sont identiques aux fibres

des familles de module correspondant; on peut aussi démontrer la Propriété plus brièvement (et rigoureusement) à partir de la propriété $\phi_{\mathcal{M}_t}(\tau) = \mathbb{1}_{\mathcal{M}_t}$ de la manière qui suit. Soit $f: B \rightarrow \mathcal{M}_t$ un morphisme; il lui correspond une unique famille $F = \phi_B^{-1}(f)$ telle que $f = \phi_B(F)$. Par naturalité de ϕ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_t(\mathcal{M}_t) & \xrightarrow{f^* = \mathcal{M}_t(f)} & \mathcal{M}_t(B) \\ \downarrow \phi_{\mathcal{M}_t} & & \downarrow \phi_B \\ \text{End}(\mathcal{M}_t) & \xrightarrow[\text{=} \circ f]{\text{hom}(f, \mathcal{M}_t)} & \text{hom}(B, \mathcal{M}_t) \end{array}$$

le diagramme commute, et en particulier

$$\begin{array}{ccc} \tau & \xrightarrow{\quad} & f^* \tau \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{1}_{\mathcal{M}_t} & \xrightarrow{\quad} & \phi_B(f^* \tau) = \mathbb{1}_{\mathcal{M}_t} \circ f = f \end{array}, \text{ donc par bijectivité de } \phi_B, f^* \tau = F \text{ et on}$$

a le résultat voulu.

1.1.2 Espaces de modules grossiers et champs de modules

La présence d'automorphismes non triviaux de familles peut empêcher l'existence d'un espace de modules fins pour ces familles, car elle permet la formation de familles localement triviales bien que globalement seulement un produit non trivialement tordu par un automorphisme, dont le morphisme associé par ϕ aurait des restrictions différentes de l'identité. On s'intéresse alors à une classification plus large.

Définition 1.2 (Espace de modules grossier). Un **espace de modules grossier** pour \mathcal{M}_t est un schéma \mathcal{M}_t muni d'une transformation naturelle $\psi: \mathcal{M}_t \rightarrow \text{hom}(-, \mathcal{M}_t)$ telle que $\psi_{\text{Spec } k}$ soit un isomorphisme, universelle au sens où pour tout couple $(M', \psi': \mathcal{M}_t \rightarrow \text{hom}(-, M'))$, il existe un unique morphisme $\Upsilon: \mathcal{M}_t \rightarrow M'$ tel que ψ' se prolonge par $\text{hom}(-, \mathcal{M}_t)$.

La formation du foncteur de modules demande de (possiblement) quotienter l'ensemble des familles par une relation d'équivalence, et un espace de modules grossier peut à ce titre présenter des singularités d'orbivariété : il s'écrit localement comme le quotient d'une variété non singulière par l'action d'un groupe fini. Afin d'obtenir un espace de modules lisse, il s'agit simplement de ne pas quotienter par la relation d'équivalence, et de conserver l'information en remplaçant l'ensemble des classes d'équivalences par le groupoïde quotient correspondant. On arrive alors à la notion de champ de modules.

On rappelle qu'un champ peut être vu comme (la catégorie des sections d') un « 2-faisceau », ou faisceau de catégories à isomorphisme de descente près : formellement, il s'agit d'une catégorie fibrée (*i.e.* un pseudofoncteur ou 2-foncteur lax) sur un site dont la catégorie fibre sur tout objet est équivalente à sa catégorie de données de descente¹. Le **champ du problème de modules** est alors un champ en groupoïdes \mathfrak{M}_t sur la catégorie des schémas (munie d'une

1. Voir *e.g.* Vistoli, « Notes on Grothendieck topologies, descent and stacks » ou Fantechi, « Stacks for everybody ».

topologie appropriée) tel que les objets de $\mathfrak{M}_t(B)$ sont toutes les familles sur B et ses flèches sont les équivalences entre familles. Un champ \mathcal{M}_t est alors un **champ de modules** pour \mathfrak{M}_t si le champ $\text{hom}_{\mathcal{E}\text{hamps}}(\mathfrak{S}\text{ch}/-, \mathcal{M}_t)$ est 2-naturellement isomorphe à \mathfrak{M}_t , soit le groupoïde $\text{hom}_{\mathcal{E}\text{hamps}}(\mathfrak{S}\text{ch}/S, \mathcal{M}_t)$ est équivalent à $\mathfrak{M}_t(S)$ pour tout schéma S .

1.2 Courbes à points marqués et stabilisation

1.2.1 Familles de courbes à n points marqués

Définition 1.3. (**Courbe à n points marqués**) Une **courbe rationnelle lisse à n points marqués** est la donnée d'une courbe projective rationnelle non singulière C munie d'un choix de n points distincts $p_1, \dots, p_n \in C$.

(Isomorphisme) Un **isomorphisme** $(C, p_1, \dots, p_n) \xrightarrow{\cong} (C', p'_1, \dots, p'_n)$ de courbes à n points marqués est un isomorphisme $\varphi : C \xrightarrow{\cong} C'$ tel que $\varphi(p_i) = p'_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

(Famille de courbes) Une **famille de courbes rationnelles à n points marqués** est une famille $\pi : X \rightarrow B$ propre et plate dont toute fibre X_b est une courbe projective rationnelle lisse munie de n sections disjointes $\sigma_i : B \rightarrow X$ fixant les points marqués dans les fibres.

(Isomorphisme de familles) Un **isomorphisme** $\left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ B \end{array} \right) \xrightarrow{\cong} \left(\begin{array}{c} X' \\ \downarrow \pi' \\ B \end{array} \right)$ est

un isomorphisme $\varphi : X \xrightarrow{\cong} X'$ faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ \sigma_i \swarrow & & \searrow \sigma'_i \\ & & B \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \end{array} .$$

La question pour le reste de cette partie sera celle de l'espace de modules fin $\mathcal{M}_{0,n}$ des courbes rationnelles à n points marqués considérées à isomorphisme près, qui est le cas $g = 0$ des espaces de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ des courbes de genre g .

Propriété 1.2. Pour $n \geq 3$, l'espace de modules fin $\mathcal{M}_{0,n}$ existe et est de dimension $n-3$, et sa famille tautologique est $\mathcal{U}_{0,n} := \mathcal{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{0,n}$ munie des n sections canoniques.

- Si $n = 3$, alors $\mathcal{M}_{0,3}$ est un point $\{\text{pt}\}$ avec la famille universelle $\mathbb{P}^1 \rightarrow \{\text{pt}\}$.
- Si $n = 4$, alors $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0; 1; \infty\}$ avec la famille universelle $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{M}_{0,4} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$.
- Si $n \geq 4$, alors $\mathcal{M}_{0,n} = \prod_{n-3} \mathcal{M}_{0,4} \setminus \cup$ diagonales avec la famille universelle $\mathcal{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{0,n}$.

Avant de démontrer la Propriété, fixons quelques notations pour la ligne projective. On appellera le **point à l'infini** le point $\infty := (1: 0)$ et, suivant l'identification de $k = \mathbb{C}$ avec $\{(x: 1) \in \mathbb{P}^1 \mid x \in \mathbb{C}\}$, on écrira $1 := (1: 1)$ et $0 := (0: 1)$. Ces trois points forment le **triplet standard** de \mathbb{P}^1 car pour tout triplet $(p_1, p_2, p_3) \in (\mathbb{P}^1)^3$ il existe une *unique homographie* ϕ dans $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = \text{PGL}(2)$ tel que $\phi(p_1, p_2, p_3) = (0, 1, \infty)$ (cf. point 1 de la démonstration).

L'étude des courbes rationnelles projectives à n points marqués peut se ramener à l'étude des n -uplets de points de la ligne projective grâce au lemme suivant.

Lemme 1.1. *Soit $X \rightarrow B$ une famille de courbes rationnelles admettant au moins 3 sections disjointes, alors $X \cong B \times \mathbb{P}^1$ et il existe un unique isomorphisme tel que les trois sections demandées soient identifiées respectivement avec les sections de $B \times \{0\}$, $B \times \{1\}$ et $B \times \{\infty\}$.*

Démonstration. D'après [Har77, chapitre V, proposition 2.2 (p. 370)], une famille $\pi : X \rightarrow B$ de courbes rationnelles admettant une section est isomorphe à la projectivisation $\mathbb{P}(E)$ d'un fibré vectoriel E de rang 2.

Si π admet trois sections disjointes, notées $\sigma_i : B \rightarrow X$, $1 \leq i \leq 3$, on peut obtenir trois sections bien définies de E en écrivant les coordonnées projectives $(x_i(b) : y_i(b))$ des $\sigma_i(b)$ (pour $b \in B$) sous la forme réduite $(1: 0)$ pour ∞ et $(\alpha_i(b) : 1)$ si $y_i(b) \neq 0$, et en associant à $(x_i(b) : y_i(b)) \in X_b \simeq \mathbb{P}^1$ le vecteur $(x_i(b), y_i(b))$ de $E_b \cong \mathbb{A}^2$.

Fixons $b \in B$. Si l'une des sections vaut $\infty = (1: 0)$, alors les deux autres ont un $y_i(b) \neq 0$ et on obtient une base (en fait un ou deux choix de bases) de E_b . Si l'une des sections vaut $0 = (0: 1)$ alors les deux autres ont $\alpha_i(b) \neq 0$ et on obtient également une base de E_b . Si les trois sections ont leurs valeurs dans $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{P}^1$ alors toute paire de $\sigma_i(b)$ donne deux vecteurs linéairement indépendants et on obtient donc trois choix de bases pour E_b . Plus succinctement, la ligne projective est construite à partir des vecteurs non nuls de \mathbb{A}^2 , et le passage au quotient élimine les dépendances linéaires, donc le choix de 3 points distincts dans $\mathbb{P}^1 \simeq X_b$ donne forcément une base de $\mathbb{A}^2 \cong E_b$.

En choisissant deux combinaisons linéaires appropriées de sections, on peut obtenir deux sections de E indépendantes partout, donnant une base définie partout, donc E est un fibré trivial, et $X \simeq \mathbb{P}(E) \cong B \times \mathbb{P}(\mathbb{A}^2) = B \times \mathbb{P}^1$. Finalement, comme mentionné précédemment et comme sera montré au point 1, il existe pour chaque fibre un unique homographie amenant les trois points sélectionnés en $(0, 1, \infty)$, et donc un unique isomorphisme $X \xrightarrow{\cong} B \times \mathbb{P}^1$ tel que l'image des trois sections consiste en les sections constantes à 0, 1 et ∞ . \square

La classification des courbes rationnelles à n points marqués revient donc à la classification des n -uplets de points de la ligne projective à **équivalence projective** près, c'est-à-dire modulo une transformation du n -uplet par application d'une homographie.

Démonstration (de la Propriété 1.2). 1. Montrons dans un premier temps que tout triplet de points de la ligne projective détermine de façon unique une homographie le fixant au triplet standard.

Soient p_1, p_2, p_3 trois points de \mathbb{P}^1 . On suppose que $p_i \neq \infty$ pour tout i et on écrit alors $p_i = (x_i : 1)$; la matrice d'une homographie ϕ dans ce choix de représentants sera $(\phi_{ij})_{ij}$. Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tel que $\phi(p_1) = 0$; alors $\phi_{11}x_1 + \phi_{12} = 0$. Si en outre $\phi(p_2) = 1$ alors $\phi_{11}x_2 + \phi_{12} = \phi_{21}x_2 + \phi_{22}$. La troisième contrainte $\phi(p_3) = \infty$ donne aussi $\phi_{21}x_3 + \phi_{22} = 0$. Il en vient, en résolvant le système linéaire résultant, que la matrice de ϕ est donnée, à un facteur ϕ_{11} près, par $\begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ \frac{x_2-x_1}{x_2-x_3} & \frac{x_1-x_2}{x_2-x_3}x_3 \end{pmatrix}$, et l'isomorphisme ϕ fixant le triplet existe et est en outre déterminé de façon unique.

Chaque triplet de points de \mathbb{P}^1 est donc projectivement équivalent au triplet standard, et l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,3}$ est bien un point, le module $[(\mathbb{P}^1, 0, 1, \infty)]$. La famille tautologique est $\mathcal{U}_{0,3} = \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{0,3} = \{\text{pt}\}$ avec les trois sections $\sigma_1(\text{pt}) = 0$, $\sigma_2(\text{pt}) = 1$ et $\sigma_3(\text{pt}) = \infty$.

2. Si $p_4 = (x_4 : 1)$ est un quatrième point (nécessairement différent de ∞) de \mathbb{P}^1 , en notant ϕ^p l'automorphisme qui fixe $p = (p_1, p_2, p_3)$ on a

$$\begin{aligned} \phi^p(p_4) &= \left(x_4 - x_1 : \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}x_4 - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}x_3 \right) \\ &= \left(\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_3} \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} : 1 \right) =: (\lambda(p, p_4) : 1) \end{aligned}$$

où $\lambda(p, p_4)$ est appelé **rappor anharmonique** du quadruplet $(p_i)_{1 \leq i \leq 4}$. Un quadruplet quelconque de points de \mathbb{P}^1 est entièrement caractérisé (à équivalence projective près) par son rapport anharmonique, qui est dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, et donc $\mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. La famille tautologique sur $\mathcal{M}_{0,4}$ a pour fibre en $(C \simeq \mathbb{P}^1, p_1, \dots, p_4)$ la ligne \mathbb{P}^1 avec ses quatre points marqués, et $\mathcal{U}_{0,4} = \mathcal{M}_{0,4} \times \mathbb{P}^1$ avec les quatre sections données par $\sigma_i(\mathbb{P}^1, p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = \infty, p_4) = p_i$.

3. Si l'on ajoute un cinquième point marqué p_5 , après avoir fixé les trois premiers points du quintuplet et choisi un rapport anharmonique pour p_4 , le choix du placement de p_5 revient là encore au choix du rapport $\lambda(p_1, p_2, p_3, p_5)$ dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, \lambda(p_1, p_2, p_3, p_4)\}$. Donc $\mathcal{M}_{0,5}$ est $\mathcal{M}_{0,4} \times \mathcal{M}_{0,4}$ privé de la diagonale, et la famille universelle est donnée comme usuellement de façon tautologique avec ses cinq sections naturelles $\sigma_i(\mathbb{P}^1, p_1, \dots, p_5) = p_i$.

En poursuivant un raisonnement semblable, pour $n \geq 4$, l'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ est $\underbrace{\mathcal{M}_{0,4} \times \dots \times \mathcal{M}_{0,4}}_{n-3 \text{ fois}}$ privé de l'union de ses diagonales, avec la famille tautologique de fibres $(\mathbb{P}^1, p_1, \dots, p_n)$ et ses n sections. □

1.2.2 Compactification et bord

Nous cherchons à définir une théorie de l'intersection sur l'espace de modules des courbes; cependant celui-ci n'est pas compact. Il faut donc pouvoir travailler sur une compactification de cet espace.

Afin de parler de compactification, il est nécessaire d'avoir une notion de *plongement*. Dans une catégorie quelconque \mathcal{C} , une notion correcte (suivant [nLa]) serait celle de **monomorphisme régulier**, un morphisme qui apparaît comme égalisateur d'un couple de flèches parallèles (il s'agit bien d'un monomorphisme). Si la catégorie considérée admet les limites et colimites finies, ce qui sera le cas pour les catégories qui nous intéressent, la notion coïncide avec celle de monomorphisme effectif.

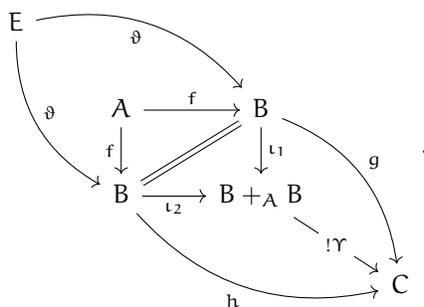
Définition 1.4 (Monomorphisme effectif). Un **monomorphisme effectif** $A \rightarrow B$ est une flèche $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ telle que la somme amalgamée $B \amalg_A B$ (aussi notée $B +_A B$) existe, et qui est l'égalisateur du diagramme canonique $B \rightrightarrows B +_A B$.

Lemme 1.2. Dans une catégorie admettant les limites et colimites finies, un monomorphisme est régulier si et seulement si il est effectif.

Démonstration. Un monomorphisme effectif est automatiquement régulier. Soient $f: A \rightarrow B$ un monomorphisme régulier, et $g, h: B \rightarrow C$ les flèches dont il est l'égalisateur. Soient également ι_1, ι_2 les coprojections canoniques $B \rightarrow B +_A B$, et $\vartheta: E \rightarrow B$ leur égalisateur. Comme g et h font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array} ,$$

il existe un unique morphisme $\Upsilon: B +_A B \rightarrow C$ tel que $g = \Upsilon \circ \iota_1$ et $h = \Upsilon \circ \iota_2$:



Comme $\iota_1 f = \iota_2 f$ et que ϑ est l'égalisateur de ι_1 et ι_2 , il existe un unique morphisme $\alpha: A \rightarrow E$ tel que $f = \vartheta \alpha$, et de même comme $g \vartheta = h \vartheta$ et que f est l'égalisateur de g et h , il existe un unique morphisme $\varepsilon: E \rightarrow A$ tel que $f \varepsilon = \vartheta$. De par les propriétés universelles de (A, f) et (E, ϑ) , α et ε sont alors inverses l'un de l'autre, soit $E \cong A$, et f est bien l'égalisateur de ι_1 et ι_2 , d'où f est un monomorphisme effectif. \square

Propriété 1.3 (et définition). *Dans la catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques et applications continues, un monomorphisme effectif est une fonction qui est un homéomorphisme sur son image munie de la topologie induite par l'inclusion dans l'espace codomaine du morphisme. On appelle de telles fonctions des **plongements d'espaces topologiques**.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que les monomorphismes effectifs dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles, sur laquelle $\mathcal{T}op$ est une catégorie concrète, sont exactement les monomorphismes, c'est-à-dire les applications injectives. Soit $f: A \rightarrow B$ une injection d'ensembles. L'ensemble $B \amalg_A B$ est le quotient de l'union disjointe $B \amalg B$ par la relation d'équivalence $\iota_1(f(x)) \sim \iota_2(f(x))$ (où $\iota_{1,2}$ désignent les deux inclusions $B \hookrightarrow B \amalg B$). Donc, f étant une injection sur B , et en particulier sur son image qui est bien la partie de $B \amalg B$ réduite à elle-même par le quotient, il s'agit bien d'un monomorphisme effectif.

Soit $f: A \rightarrow B$ un monomorphisme effectif dans $\mathcal{T}op$. La somme amalgamée $B \amalg_A B$ est simplement l'ensemble $B \amalg_A B$ muni de la topologie quotient sur l'union disjointe. L'égalisateur des deux fonctions est une partie de B (l'égalisateur ensembliste) muni de la topologie induite par son inclusion, et f satisfait bien à la caractérisation des plongements topologiques. \square

Dans la catégorie $\mathcal{S}ch$ des schémas, la notion correspondante est celle d'**immersion (localement fermée)**, la composée $\iota = gf$ d'une immersion fermée f par une immersion ouverte g (en particulier une immersion ouverte ou fermée). En effet, l'égalisateur de deux morphismes $\phi, \phi': X \rightrightarrows Y$ est le produit fibré $X \times_{(\phi, \phi'), Y \times_Y \Delta_Y} Y$ avec Δ_Y une immersion, et une immersion ouverte ou fermée $Z \rightarrow X$ est l'égalisateur des morphismes $X \rightrightarrows X +_Z X$. Nous pouvons maintenant définir :

Définition 1.5 (Compactification). Une **compactification** d'un espace topologique X est un plongement $f: X \rightarrow \bar{X}$ dans un espace compact \bar{X} qui réalise X comme sous-espace dense de \bar{X} .

Une compactification d'un schéma est donc une immersion propre. Pour une compactification ouverte, on retrouve alors X comme l'intérieur $\overset{\circ}{\bar{X}}$, et les points ajoutés à X pour le compactifier forment le bord $\partial\bar{X}$ de \bar{X} .

1.2.3 Courbes préstables et stables

Afin d'obtenir une bonne compactification de $\mathcal{M}_{0,n}$, il s'agit d'y ajouter les points limites de familles de courbes rationnelles, correspondant à l'apparition de dégénération. Celles-ci peuvent se produire de deux façons : une partie de la courbe peut être « pincée » jusqu'à en être réduite à un point qui sépare alors la courbe en deux composantes irréductibles, ou deux points marqués peuvent se rapprocher et se confondre. Nous allons voir que, dans ces deux cas, le résultat est une courbe nodale réductible, et donc il convient d'élargir notre notion de courbe pour accepter dans l'espace de modules certaines courbes réductibles.

Définition 1.6 (Arbre de lignes projectives). Un **arbre de lignes projectives** est une courbe connexe telle que :

1. chaque composante irréductible, appelée **branchette**, est isomorphe à la ligne projective;
2. les points d'intersections des différentes branchettes sont des points doubles ordinaires (des crunodes²);
3. il n'y a pas de circuit fermé, *i.e.* la courbe n'est plus connexe si un node est retiré.

Une **courbe préstable de genre 0** est un arbre de lignes projectives réduit muni de n points marqués distincts et distincts des points singuliers.

On qualifie les points marqués et les points nodaux de **points spéciaux**.

Remarque 1.2. — Il vient des conditions 1 et 3 que le genre $g := \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$ d'un arbre de lignes projectives C est bien nul.

— Le graphe dual d'un arbre de lignes projectives, obtenu en associant un sommet à chaque branchette et une arête pour chaque point singulier d'intersection, est bien un arbre. La condition 2 implique que chaque arête est adjacente à deux sommets, ou en termes de la courbe que chaque node est le point d'intersection de deux branchettes.

On a alors trois représentations graphiques naturelles des courbes préstables : la représentation algébrique, où chaque branchette, isomorphe à \mathbb{P}^1 , est figurée par une ligne, la représentation topologique en demi-dimension, où les branchettes apparaissent comme des sphères de Riemann, et la représentation en graphe dual, construite comme indiqué dans la Remarque et en associant à chaque point marqué une demi-arête. On donne en Figure 1.1 un exemple de ces trois représentations.

Définition 1.7 (Courbe stable). Une courbe préstable de genre 0 à n points marqués $(C; p_1, \dots, p_n)$ est dite **stable** si chaque branchette contient au moins trois points spéciaux.

Sur le graphe dual, la condition de stabilité est équivalente à la simple condition combinatoire que chaque sommet ait une valence d'au moins 3. La courbe représentée en Figure 1.1 est stable.

Un **isomorphisme** entre deux courbes stables à n points marqués $(C; p_1, \dots, p_n)$ et $(C'; p'_1, \dots, p'_n)$ est un isomorphisme $\phi: C \xrightarrow{\cong} C'$ tel que $\phi(p_i) = p'_i$ pour tout i . Un automorphisme d'une courbe stable est donc un automorphisme de la courbe qui fixe ses points marqués.

Propriété 1.4. *Une courbe préstable de genre 0 est stable si et seulement si elle n'a pas d'automorphismes non triviaux.*

2. C.f. [Lip69] pour une caractérisation des points doubles; il nous suffira de considérer les nodes comme paramétrés par $xy = 0$.

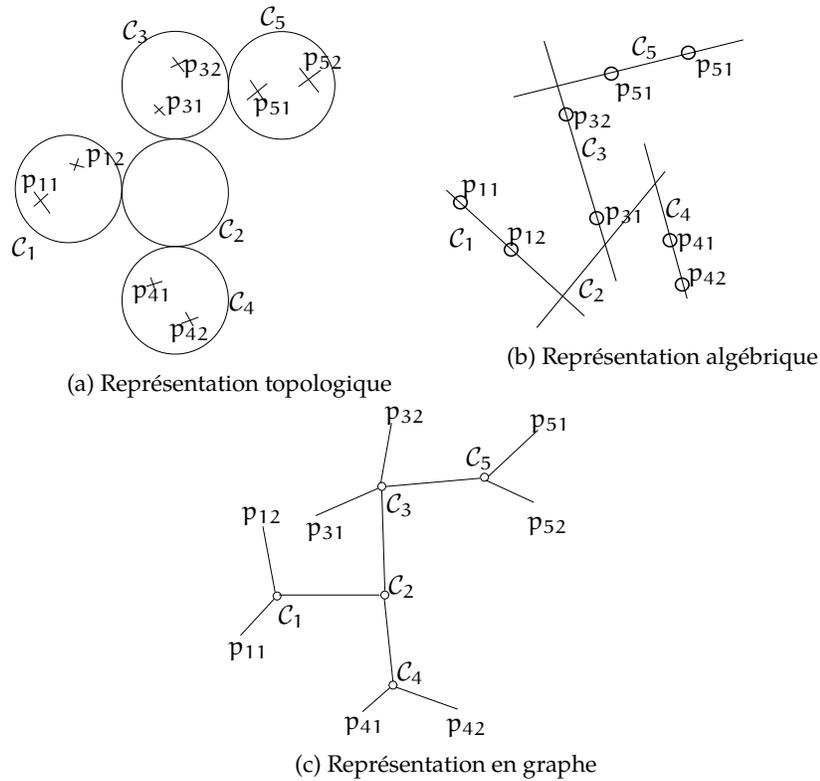


FIGURE 1.1 – Représentation d’une courbe à 5 branchettes \mathcal{C}_i avec les points marqués p_{ij} (les nodes ne sont pas énumérés)

Démonstration. \Rightarrow Soit $(C; p_1, \dots, p_n)$ une courbe stable. Soit $\phi \in \text{Aut}(C; p_1, \dots, p_n)$; comme il fixe les points marqués il doit envoyer chaque branchette en possédant sur elle-même.

Si une branchette de C n’a pas de node, alors C est isomorphe à \mathbb{P}^1 avec au moins trois points marqués que, à composition de l’isomorphisme $C \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1$ avec un automorphisme uniquement déterminé près, l’on peut choisir comme le triplet standard $(0, 1, \infty)$. Alors ϕ fixe ce triplet, ce que fait aussi l’identité, et ces deux automorphismes sont alors l’automorphisme unique fixant le triplet standard; donc $\text{Aut}(C; p_1, \dots, p_n)$ est trivial.

Si une branchette a un point double, alors elle a au moins deux points marqués, et est envoyée sur elle-même en fixant les points marqués. Le point nodal est unique et donc également fixé. Sur la branchette, ϕ se restreint donc à un automorphisme de \mathbb{P}^1 fixant trois points, c’est-à-dire l’identité.

Considérons maintenant le cas d’une branchette avec deux points doubles. Par stabilité, elle a (au moins) un point marqué qui est fixé, et

elle est envoyée sur elle-même. Les deux points nodaux peuvent alors être conservés on échangés. Un point nodal est relié à une série d'autres branchettes, et celle-ci doit s'achever par une branchette contenant deux points marqués et un seul nodes (s'il y en avait deux on aurait forcément un circuit fermé, et donc un genre positif). Cette branchette finale est fixée ainsi que son node unique, donc en suivant la série (qui ne peut pas comporter de branchette à trois nodes sans les deux autres fixés par une branchette stable à moins de former un circuit fermé) on fixe finalement le node de la branchette originale, et l'autre est alors fixé par défaut ou en suivant le même raisonnement.

Si une branchette a trois points nodaux, en suivant le même raisonnement que pour deux, *i.e.* en évitant les circuits fermés lorsqu'on limite la série de branchettes, on fixe encore les trois nodes.

⇐ Soit $(C; p_1, \dots, p_n)$ une courbe préstable sans automorphisme non-trivial. Si une branchette de C avait moins de trois points spéciaux, elle permettrait un automorphisme non trivial, donc C est stable. □

Une **famille** de courbes préstables (resp. stables) à n points marqués est une famille plate et propre $\pi: C \rightarrow B$ munie de n sections disjointes $\sigma_i: B \rightarrow C$ sélectionnant les points marqués dont chaque fibre $C_b = \pi^{-1}(b)$ est une courbe préstable (resp. stable).

Théorème 1.1. *Il existe un espace de modules fins $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ pour le problème de la classification des courbes stables qui est une variété projective lisse; en outre il est une compactification de $\mathcal{M}_{0,n}$ qui en est un ouvert.*

On utilisera pour sa construction et son étude la Propriété suivante :

Propriété 1.5. *La famille universelle $\overline{\mathcal{U}}_{0,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est donnée par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ avec le morphisme d'oubli qui néglige le dernier point marqué.*

1.3 Construction de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

1.3.1 Contraction et stabilisation

Lemme 1.3 (et définition). *Soit $(\pi: C \rightarrow B; \sigma_1: B \rightarrow C, \dots, \sigma_{n+1}: B \rightarrow C)$ une famille de courbes stables à $n + 1$ points marqués avec $n \geq 3$; alors il existe un B-morphisme $\chi: C \rightarrow C'$, unique à isomorphisme unique près, tel que :*

- $(C', \sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$ est une famille de courbes stables à n points marqués;
- pour $1 \leq i \leq n$, on a $\sigma'_i = \chi \circ \sigma_i$;
- sur chaque fibre $C_b, b \in B$, si une branchette E contient $\sigma_{n+1}(b)$ et $E \setminus \sigma_{n+1}(b)$ est instable, alors $\chi(E)$ est un point fermé de C' , et χ est un isomorphisme sur toute branchette restée stable après oubli de $\sigma_{n+1}(b)$.

Un morphisme de ce type est appelé **contraction**.

La stabilisation commute avec les produits fibrés, donc en particulier pour connaître la stabilisation d'une famille il suffit de s'intéresser aux fibres.

Esquisse de construction. Nous renvoyons à [Knu83] pour la démonstration complète; cependant il est utile d'explicitier la construction de χ .

Si C_b reste stable après oubli de $\sigma_{n+1}(b) = p_{n+1}$, i.e. $C'_b = \chi(C_b)$ est stable, alors C'_b est simplement C_b et $\chi|_{C_b}$ est l'identité. Il ne reste alors que les cas où la branchette E qui contient p_{n+1} a deux autres points spéciaux. Si ils sont tous deux des points marqués, alors $E \simeq \mathbb{P}^1$ (et donc C_b aussi) et on ne peut pas lui retirer de point. Il ne reste donc que deux cas.

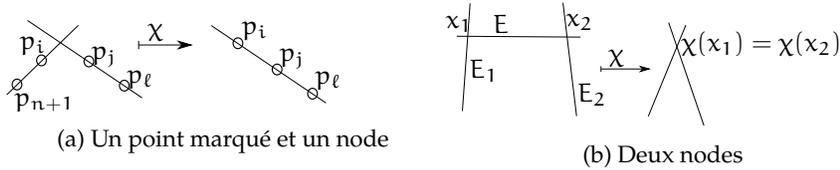


FIGURE 1.2 – Stabilisation non triviale

Si E a un autre point marqué p_i et un node (voir Figure 1.2a), elle est réduite à un point $\chi(E)$ placé à la position du point nodal, qui devient le point marqué. Si E n'a pas d'autre point marqué et a donc deux nodes (comme en Figure 1.2b), dénotant les intersections avec les branchettes E_1 et E_2 , alors E est réduite à $\chi(E)$ qui devient un node marquant l'intersection de E_1 et E_2 . \square

L'opération de contraction définit en fait un foncteur de la catégorie des courbes stables à $n + 1$ points marqués sur celle des courbes stables à n points marqués munies d'une section supplémentaire (et dont les morphismes respect également la section supplémentaire).

Plus généralement, pour $A \subset [n] := \{1, \dots, n\}$ un ensemble de marques, on note $\mathcal{M}_{0,A}$ l'espace de modules des courbes rationnelles à points marqués indexés par A (et $\overline{\mathcal{M}}_{0,A}$ sa compactification), et pour $B \subset A$ on a un morphisme d'oubli $\mathcal{M}_{0,A} \rightarrow \mathcal{M}_{0,B}$ obtenu en composant les morphismes d'oubli individuels (qui commutent entre eux, le choix du point à oublier n'étant qu'une convention d'écriture).

Propriété 1.6 (et définition). *Soit $(\pi: C \rightarrow B; \sigma_1: B \rightarrow C, \dots, \sigma_n: B \rightarrow C)$ une famille de courbes stables à n points marqués avec $n \geq 3$ et $\sigma: B \rightarrow C$ une section supplémentaire (quelconque, en particulier sans condition d'être disjointe des autres sections ou des nodes). Il existe alors un unique (à isomorphisme près) B -morphisme $\Sigma: C \rightarrow C^\sigma$ tel que :*

- $(C^\sigma, \sigma'_1, \dots, \sigma'_{n+1})$ soit une courbe stable à $n + 1$ points marqués;
- $\Sigma \circ \sigma = \sigma'_{n+1}$;
- C soit la contraction de C^σ par rapport à σ'_{n+1} .

Un tel morphisme est appelé **stabilisation**.

L'opération de stabilisation apparaît donc comme inverse de la contraction. Notons qu'elle commute également avec les produits fibrés.

Esquisse de construction. Là encore nous renvoyons à [Knu83], et proposons simplement une description explicite de C^σ fibre par fibre.

Soit donc $b \in B$; si $\sigma(b) =: p$ est disjoint de tous les points spéciaux de C_b , alors comme $(C_b, \sigma_1(b), \dots, \sigma_n(b))$ est une courbe stable elle le reste en marquant p . La courbe peut seulement devenir instable si p coïncide avec un point spécial.

Si p coïncide avec un node q , on définit C_b^σ comme l'éclatement de C_b en q , avec le point spécial $p' := \sigma'_{n+1}(b)$ placé sur le diviseur exceptionnel, qui est \mathbb{P}^1 donc bien de genre 0. Les deux branchettes dont le point d'intersection était q ont toujours le même nombre de points spéciaux, q étant remplacé par l'intersection avec le diviseur exceptionnel, et celui-ci a exactement trois points spéciaux (les deux intersections remplaçant q et p'), donc il n'est pas nécessaire d'y spécifier la position de p' .

Si p coïncide avec un point marqué $p_i := \sigma_i(b)$, on procède de façon similaire en définissant C_b^σ comme l'éclatement de C_b en p_i , et en plaçant $p'_i := \sigma_i(b)$ et p' sur le diviseur exceptionnel. La branchette qui contenait p_i le voit remplacé par le node q représentant l'intersection avec le diviseur exceptionnel, et garde donc le même nombre de points spéciaux. Le diviseur exceptionnel a là encore trois points spéciaux, dont un (le point nodal) dont la position est déterminée, donc la position de p' et p'_i est déterminée à l'ordre près, et on peut choisir l'ordre (q, p'_i, p') . \square

1.3.2 Construction récursive

Théorème 1.2. *Pour tout $n > 3$, l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est donné par la famille universelle $\overline{\mathcal{U}}_{0,n-1}$, et $\overline{\mathcal{U}}_{0,3} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ est donné par $\mathbb{P}^1 \rightarrow \{\text{pt}\}$.*

Démonstration. — Nous savons déjà que $\mathcal{M}_{0,3} = \{\text{pt}\}$, qui est déjà compact. En outre, toute courbe stable avec seulement trois points marqués ne peut avoir qu'une branchette, car les seuls autres points spéciaux potentiels sont les nodes, qui rajouteraient plus de composantes. Donc $\overline{\mathcal{M}}_{0,3} = \{\text{pt}\}$, et la famille universelle a pour seule fibre \mathbb{P}^1 avec les trois points marqués 0, 1 et ∞ .

— Nous avons également vu que $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, dont la compactification évidente est \mathbb{P}^1 . En effet, la seule limite non irréductible de la famille de courbes (paramétrée par $\mathcal{M}_{0,4}$) $(C; 0, 1, \infty, t \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1)$ est une courbe à deux composantes, correspondant alors à la stabilisation du cas où t vient coïncider avec l'un des trois points déjà marqués. Ajouter ces courbes dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \setminus \mathcal{M}_{0,4}$ revient à ajouter leur paramètre t , et on obtient donc bien $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{P}^1 = \overline{\mathcal{U}}_{0,4}$. La récurrence est bien initialisée.

— Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ soit bien donné par $\overline{\mathcal{U}}_{0,n-1}$. Nous cherchons à montrer que la famille tautologique $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}$ représente bien le foncteur de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ par la transformation naturelle notée ϕ .

Soit $F \xrightarrow{\pi} B$ une famille de courbes stables à $n + 1$ points marqués $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$. On note F' la contraction de F oubliant σ_{n+1} ; il s'agit

d'une famille de courbes à n points marqués qui par hypothèse correspond à un morphisme $\phi_B(F') : B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. On a alors un diagramme $B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \leftarrow \overline{\mathcal{U}}_{0,n}$ et on peut former le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} & \phi_B(F')_* (\overline{\mathcal{U}}_{0,n}) = B \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \overline{\mathcal{U}}_{0,n} & \\ & \swarrow \text{pr}_1 & \searrow \text{pr}_2 \\ B & & \overline{\mathcal{U}}_{0,n} \\ & \searrow \phi_B(F') & \swarrow \\ & \overline{\mathcal{M}}_{0,n} & \end{array}$$

Pour tout $b \in B$, la fibre $\text{pr}_1^{-1}(b)$ est par construction égale à F'_b . Or la stabilisation de F'_b est muni d'un $n+1$ -ième point marqué, ce qui donne un morphisme $B \rightarrow F' \subset \overline{\mathcal{U}}_{0,n}$. On note en particulier que le morphisme construit est entièrement caractérisé par le dernier point marqué. Soit à l'inverse $\mu \in \text{hom}(B, \overline{\mathcal{U}}_{0,n})$ un morphisme $B \rightarrow \overline{\mathcal{U}}_{0,n}$. En composant avec la projection canonique, on obtient un morphisme μ' dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, qui donne alors une famille $\phi_B^{-1}(\mu')$ de courbes stables à n points marqués. La famille $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}$ étant universelle, $\phi_B^{-1}(\mu')$ s'écrit comme le tiré-arrière de $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}$ selon μ' :

$$\begin{array}{ccc} \phi_B^{-1}(\mu') & \xrightarrow{\mu'^*} & \overline{\mathcal{U}}_{0,n} \\ \downarrow \pi & \nearrow \mu & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mu'} & \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \end{array}$$

On observe que la fibre $\pi^{-1}(b)$ en $b \in B$ est envoyée en $\mu'(b) = [\pi^{-1}(b)] \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ et que donc μ'^* l'envoie également dans $\pi^{-1}(b) \subset \overline{\mathcal{U}}_{0,n}$, d'où il vient que μ emmène b dans $\pi^{-1}(b)$, et est une section de π . On obtient donc une courbe dont le $n+1$ -ième point marqué est donné par le morphisme $B \rightarrow \overline{\mathcal{U}}_{0,n}$.

Les deux constructions précédentes sont donc bien inverse l'une de l'autre ; notons ψ_B cette bijection $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(B) \xrightarrow{\cong} \text{hom}(B, \overline{\mathcal{U}}_{0,n})$. Il reste à vérifier la naturalité. Soit $f : B \rightarrow S$ un morphisme de schémas, nous pouvons dessiner le diagramme suivant dont il s'agit de montrer la commutativité :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(S) & \xrightarrow{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(f)} & \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(B) \\ \psi_S \downarrow & & \downarrow \psi_B \\ \text{hom}(S, \overline{\mathcal{U}}_{0,n}) & \xrightarrow{\text{hom}(f, \overline{\mathcal{U}}_{0,n})} & \text{hom}(B, \overline{\mathcal{U}}_{0,n}) \end{array} \quad (*)$$

Soit $[F] \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(S)$. Alors $(\text{hom}(f, \overline{\mathcal{U}}_{0,n}) \circ \psi_S)(F)$ est le morphisme $\sigma_{n+1} \circ f$ correspondant à la composition de f avec la dernière section σ_{n+1} de $F \rightarrow S$. Concomitamment, $(\psi_B \circ \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(f))(F)$

est le morphisme correspondant à la dernière section du tiré-arrière de $[F]$ selon f . Celui-ci est donné par le diagramme cartésien

$$\text{sien } \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(F) & \longrightarrow & F \\ \overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(\sigma_{n+1}) \uparrow \downarrow & & \downarrow \uparrow \sigma_{n+1} \\ B & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

par propriété des morphismes de courbes marquées les sections donnent aussi un diagramme commutatif. Considérons $b \in B$ et la fibre de $\overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(F)$ en b ; le produit fibré la définissant se juxtapose au diagramme cartésien précédent :

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(F)_b & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(F) & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b & \longleftarrow & B & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Les deux carrés sont cartésiens, donc le grand rectangle l'est aussi, et $\overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(F)_b = b \times_S F = F_{f(b)}$, soit les fibres de $\overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}(f)(F)$ sont identiques à celles de F , et on a finalement la commutativité du diagramme (*). Donc l'association $B \mapsto \psi_B$ est naturelle, et $\overline{\mathcal{U}_{0,n}}$ représente bien le foncteur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}$, ce qui prouve le théorème. \square

Nous pouvons à présent utiliser ce résultat pour construire explicitement $\overline{\mathcal{M}_{0,n+1}}$ à partir de $\overline{\mathcal{U}_{0,n}}$. Soit $p \in \overline{\mathcal{U}_{0,n}}$. Il appartient à la fibre $\pi^{-1}(\pi(p))$ (où $\pi: \overline{\mathcal{U}_{0,n}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,n}}$ est la projection), qui est une courbe à n points marqués. En marquant p et stabilisant, on obtient donc une courbe à $n+1$ points marqués. La famille universelle $\overline{\mathcal{U}_{0,n+1}}$ est alors $\overline{\mathcal{M}_{0,n+1}} \times_{\overline{\mathcal{M}_{0,n}}} \overline{\mathcal{U}_{0,n}}$, munie des tirés-arrière des n sections $\sigma_i: \overline{\mathcal{M}_{0,n}} \rightarrow \overline{\mathcal{U}_{0,n}}$ ainsi que de la section diagonale Δ .

Il en vient également que, $\overline{\mathcal{U}_{0,n}}$ étant de dimension relative 1 (car c'est une famille de courbes), on a $\dim \overline{\mathcal{M}_{0,n+2}} = \dim \overline{\mathcal{U}_{0,n}} = 2 \cdot (\dim \overline{\mathcal{M}_{0,n}} + 1) - \dim \overline{\mathcal{M}_{0,n}} = \dim \overline{\mathcal{M}_{0,n}} + 2$, et donc récursivement $\dim \overline{\mathcal{M}_{0,n}} = n - 3$.

Remarque 1.3. Les propriétés additionnelles de lissité et de projectivité sont établies dans [Knu83] et [Keeg2].

1.3.3 Étude du bord

Définition 1.8 (Stratification). Un **espace stratifié** est un espace X muni d'une filtration $\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $X_n \setminus X_{n-1}$ soit une variété différentiable. Ses composantes irréductibles sont appelées les **strates**.

Le bord $\partial \overline{\mathcal{M}_{0,n}} = \overline{\mathcal{M}_{0,n}} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ consiste des courbes réductibles, *i.e.* celles contenant des points nodaux. Il admet en particulier une stratification naturelle par le nombre de nodes. Notons Σ_δ l'ensemble des courbes ayant δ points nodaux ou moins, pour $\delta \leq n - 3$. L'ensemble $\Sigma_\delta \setminus \Sigma_{\delta-1}$ contient les courbes avec exactement δ points nodaux. On a évidemment $\Sigma_0 = \mathcal{M}_{0,n}$.

On peut caractériser un élément C de $\Sigma_\delta \setminus \Sigma_{\delta-1}$ en trois étapes :

1. donner sa *configuration*, c'est-à-dire la répartition des nodes et des points marqués sur les branchettes ;
2. donner une numérotation des points spéciaux. Cette prescription permet de fixer C sur une composante irréductible de $\Sigma_\delta \setminus \Sigma_{\delta-1}$, c'est-à-dire une *strate*.
3. Donner la position des points spéciaux sur leurs branchettes respectives.

L'adhérence d'une strate donnée (différente de Σ_0) est une sous-variété irréductible de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, appelée **cycle de bord**. Le bord d'un cycle de bord contient des courbes avec un plus grand nombre de nodes.

Théorème 1.3. *Toute strate est isomorphe à un produit $\prod_i \mathcal{M}_{0,n_i}$ d'espaces de modules de courbes rationnelles à $n_i \leq n + \delta$ points marqués.*

Il en découle en particulier que chaque strate est bien une variété différentiable, en tant que produit d'unions disjointes d'ouverts de \mathbb{P}^1 .

Démonstration. Soient $1 < \delta \leq n - 3$ un nombre de nodes, $\Gamma \subset (\Sigma_\delta \setminus \Sigma_{\delta-1})$ une strate et $(C; p_1, \dots, p_n) \in \Gamma$. Notons $B_1, \dots, B_{\delta+1}$ ses $\delta + 1$ branchettes et $\nu_{i,1}, \dots, \nu_{i,\deg B_i}$ les nodes de la branchette B_i , où $\deg B_i$ est son nombre de points nodaux.

D'après la discussion ci-dessus, les seuls degrés de liberté pour C sont la position des points spéciaux dans les branchettes, le reste étant fixé par l'appartenance à une strate. On peut donc considérer chaque branchette séparément en considérant les nodes comme des points marqués sur les branchettes isolées. Pour une branchette B_i d'ensemble de points marqués J_i , la paramétrisation du placement de ses points marqués prend place sur $\mathcal{M}_{0,J_i \sqcup \{\nu_{i,j}\}_{1 \leq j \leq \deg B_i}}$. Finalement, les différentes branchettes étant indépendantes, on a

$$\Gamma \cong \prod_{i=1}^{\delta+1} \mathcal{M}_{0,J_i \sqcup \{\nu_{i,j}\}_{1 \leq j \leq \deg B_i}}$$

où l'on note que la partition $\bigsqcup_i J_i = \{p_1, \dots, p_n\}$ est entièrement déterminée par les caractéristiques de Γ . \square

On peut calculer la dimension des strates. Si la courbe C a δ nodes, elle a $\delta + 1$ branchettes et, chaque node étant un point spécial sur les deux branchettes dont il marque l'intersection, $n + 2\delta$ points spéciaux. Sur chaque branchette, trois points spéciaux sont fixés, ce qui retire $3(\delta + 1)$ degrés de liberté, et il en ressort que

$$\dim \Gamma_\delta \setminus \Gamma_{\delta-1} = n + 2\delta - 3\delta - 3 = n - 3 - \delta = \dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n} - \delta.$$

On retrouve donc bien que $\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n} = \dim \mathcal{M}_{0,n}$ et que la dimension des cycles de bord diminue avec l'augmentation du nombre de bords, avec des cycles de points pour la valeur limite de $n - 3$ points nodaux.

Les cycles de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, c'est-à-dire ceux représentant les strates constituées de courbes à un point nodal et deux branchettes, sont appelés les **diviseurs de bord**. Sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$, les diviseurs de bord, de dimension 0,

sont constitués des courbes avec deux branchettes contenant chacune deux des points marqués. Un tel diviseur se note $D(i, j|k, \ell)$ où i, j sont les points marqués sur une branchette et k, ℓ les points marqués de l'autre; ils sont isomorphes à $\mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3}$ qui est bien de dimension 0.

L'image inverse d'un diviseur $D(i, j|k, \ell)$ par le morphisme d'oubli $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,\{i,j,k,\ell\}}$ est une somme de diviseurs $D(A|B)$, où $A \sqcup B = \{1, \dots, n\}$, les points i, j sont dans A et les points k, ℓ dans B , et une courbe de $D(A|B)$ a un node avec les points de A marqués sur une branchette et ceux de B sur l'autre. On a $H_0(\mathbb{P}^1) = A_0 \overline{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{Z}$ donc les diviseurs $D(i, j|k, \ell)$, $D(i, k|j, \ell)$ et $D(i, \ell|j, k)$ sont rationnellement équivalents. Comme l'équivalence rationnelle est préservée par tiré-arrière selon un morphisme plat, on obtient la relation

$$\sum_{\substack{\{i,j\} \subset A \\ \{k,\ell\} \subset B}} D(A, B) = \sum_{\substack{\{i,k\} \subset A \\ \{j,\ell\} \subset B}} D(A, B) = \sum_{\substack{\{i,\ell\} \subset A \\ \{j,k\} \subset B}} D(A, B)$$

dans $A_{n-3-1} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, qui est donc à comprendre comme une équivalence rationnelle des diviseurs. Enfin, s'il n'y a aucune relation d'inclusion entre les ensembles A, B, A', B' des deux partitions $A \sqcup B = \{1, \dots, n\}$ et $A' \sqcup B' = \{1, \dots, n\}$, on a $D(A|B) \cap D(A'|B') = \emptyset$ (les cas contraires viennent de $D(A|B) \cap D(A'|B') = D(A|A' \setminus A = B \setminus B'|B')$ si $A \subset A'$ et $B' \subset B$). Il est montré dans [Kee92, théorème 1 (p. 569)] que l'anneau de Chow est engendré par les classes des diviseurs $D(A|B)$ avec un ensemble complet de relations fourni par les deux ensembles de relations donnés ci-dessus.

Chapitre 2

Espace de modules des applications stables

2.1 Applications stables

2.1.1 Espace de modules $\mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)$

Soient C une courbe connexe lisse de genre 0 à n points marqués, X une variété projective lisse et $\mu: C \rightarrow X$. La classe fondamentale $[C]$ correspond alors par poussée-avant selon f à un cycle d'image directe $\mu_*[C] \in A_1X$. Si $\beta \in A_1X$, on veut définir $\mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)$ comme l'espace de modules des classes d'isomorphismes d'applications pointées $(C; p_1, \dots, p_n; \mu: C \rightarrow X)$ d'image directe $\mu_*[C] = \beta$; on dit qu'elles **représentent** la classe β .

Un isomorphisme d'applications pointées $\mu \cong \mu'$ est simplement un isomorphisme $\tau: C \xrightarrow{\cong} C'$ des courbes pointées sources tel que $\mu = \mu' \circ \tau$. Une famille d'applications pointées sur un schéma B est une famille $\pi: C \rightarrow B$ de courbes pointées munie d'un morphisme $\mu: C \rightarrow X$. On l'écrira généralement $C \rightarrow (B, X)$.

Comme X est une variété projective, le cas $X = \mathbb{P}^r$ sera d'une grande importance. Dans ce cas, $A_1\mathbb{P}^r = \mathbb{Z} \cdot [\text{ligne}]$ est généré par la classe d'une ligne. On écrira $\mathcal{M}_{0,n}(X, d)$ où d est le degré des applications pour $\mathcal{M}_{0,n}(X, d[\text{ligne}])$.

Notons $W(r, d) \subset \text{hom}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$ l'ensemble des applications $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$ de degré d . Il s'agit d'un hom interne à la catégorie des variétés projectives; en effet on peut lui donner la structure de $\mathbb{P}(\bigoplus_0^r \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)))$ qui est de dimension $rd + r + d$. Cet espace bénéficie également d'une famille d'applications naturelle $W(r, d) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (W(r, d); \mathbb{P}^R)$ avec l'application $e: W(r, d) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r, (\mu, x) \mapsto e_\mu(x) = \mu(x)$.

Propriété 2.1. *La famille $W(r, d) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (W(r, d); \mathbb{P}^R)$ est universelle.*

Démonstration. Soit B un schéma muni d'une application $\mu: B \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$. Pour $b \in B$, on notera μ_b la restriction $\mu|_{\text{pr}_1^{-1}(b)}$ (où $\text{pr}_{1,2}$ sont les projections natu-

relles) de μ à la fibre de $B \times \mathbb{P}^1$ en b ; il s'agit d'une application $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$ et donc d'un élément de $W(r, d)$, ce qui donne un morphisme $\mu_\bullet: B \rightarrow W(r, d)$, $b \mapsto \mu_b$.

Le morphisme μ_\bullet donne également une flèche $\mu_\bullet \times \mathbb{1}: B \times \mathbb{P}^1 \rightarrow W(r, d) \times \mathbb{P}^1$ faisant commuter, avec pr_1 , le diagramme sur $B \rightarrow W(r, d) \leftarrow W(r, d) \times \mathbb{P}^1$. Par propriété du produit fibré (car nous sommes dans $\mathcal{S}ch$ qui les admet), il existe un unique morphisme $\Upsilon: B \times \mathbb{P}^1 \rightarrow B \times_{W(r, d)} (W(r, d) \times \mathbb{P}^1) =: \mu_\bullet^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1)$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc}
 B \times \mathbb{P}^1 & & \\
 \downarrow \text{pr}_1 & \searrow \mu_\bullet \times \mathbb{1} & \\
 B & \xrightarrow{\mu_\bullet} & W(r, d) \\
 \uparrow \Upsilon & & \downarrow \\
 \mu_\bullet^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1) & \longrightarrow & W(r, d) \times \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

Par la propriété universelle, il suffit donc de trouver une application $\mu_\bullet^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1) \rightarrow B \times \mathbb{P}^1$ rendant le diagramme commutatif pour avoir l'isomorphisme $B \times \mathbb{P}^1 \cong \mu_\bullet^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1)$. Soit $(b, (\nu, x)) \in B \times_{W(r, d)} W(r, d) \times \mathbb{P}^1$; alors $\nu = \mu_b$ donc en prenant simplement la projection $(b, (\nu, x)) \mapsto (b, x)$ le diagramme obtenu est évidemment commutatif (et Υ est $(b, x) \mapsto (b, (\mu_b, x))$ qui est bien l'inverse du morphisme choisi). Donc $B \times \mathbb{P}^1$ est bien le produit fibré $B \times_{W(r, d)} W(r, d) \times \mathbb{P}^1$.

Soit $\omega: B \rightarrow W(r, d)$ une autre application telle que $B \times \mathbb{P}^1 = \omega^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1)$. Choisissons un isomorphisme $\vartheta: \omega^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1) \xrightarrow{\cong} B \times \mathbb{P}^1$, par exemple $\vartheta(b, (\omega(b), x)) = (b, x)$. En composant avec Υ on obtient l'isomorphisme $(b, (\omega(b), x)) \mapsto (b, (\mu_b, x))$, qui permet à $\omega^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1)$ de faire commuter le carré cartésien correspondant à $\mu_\bullet^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1)$. Donc l'isomorphisme $\mu_\bullet^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1) \cong \omega^*(W(r, d) \times \mathbb{P}^1)$ est unique, et à reparamétrisation par automorphisme de B près on a $\omega = \mu_\bullet$. \square

La variété projective $W(r, d)$ est donc un espace de modules fin pour la classification des applications $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$ de degré d . Cependant, il ne traite pas des familles non triviales de courbes rationnelles ni des courbes avec points marqués, et ne tient pas compte des automorphismes de la courbe source. Il nous faut donc un espace de modules $\mathcal{M}_{0, n}(\mathbb{P}^r, d)$ plus adapté aux familles d'applications depuis des courbes rationnelles à isomorphismes près.

Avant de le construire, montrons un résultat sur la stabilité des applications $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$ depuis une courbe rationnelle sans point marqué.

Lemme 2.1 ([KV07, lemme 2.1.12 (p. 52)]). *Soit $\mu: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^r$, un morphisme non constant, c'est-à-dire dont l'image est une courbe et non un point. Alors le nombre d'automorphismes de μ est fini, et si μ est birationnel sur son image le seul automorphisme est $\mathbb{1}_{\mathbb{P}^1}$.* \square

Le foncteur de problème de modules $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ associe à chaque schéma B l'ensemble $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)(B)$ des familles $C \rightarrow (B, \mathbb{P}^r)$ d'applications dans \mathbb{P}^r de degré d modulo isomorphismes de la courbe cible.

Théorème 2.1. *Il existe un espace de modules fin $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ représentant $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ et muni d'une famille universelle; il s'agit de $\mathcal{M}_{0,n} \times W(r, d) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{0,n} \times W(r, d)$.*

Démonstration. Soit $C \xrightarrow{(\pi_B, \mu)} (B, \mathbb{P}^r)$ une famille d'applications de degré d depuis des courbes rationnelles. On note $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les n sections de π_B ; elles exhibent $C \rightarrow B$ comme une famille de courbes rationnelles et définissent donc un morphisme unique $\beta: B \rightarrow \mathcal{M}_{0,n}$ selon lequel C est le tiré-arrière de la famille tautologique $\mathcal{U}_{0,n} = \mathcal{M}_{0,n} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{0,n}$.

En outre, comme C a $n \geq 3$ sections dont les trois premières peuvent être fixées au triplet standard $0, 1, \infty$, elle est d'après le Lemme 1.1 isomorphe de façon unique à la famille triviale $B \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, ce qui avec le morphisme $\mu: C \rightarrow \mathbb{P}^r$ définit par propriété universelle de la famille tautologique de $W(r, d)$ un morphisme unique $\omega: B \rightarrow W(r, d)$ selon lequel C est le tiré-arrière de $W(r, d) \times \mathbb{P}^1$ à isomorphisme $C \cong B \times \mathbb{P}^1$ unique près.

On peut donc former le morphisme $(\beta, \omega): B \rightarrow \mathcal{M}_{0,n} \times W(r, d)$, qui vérifie bien la propriété universelle de façon unique. \square

2.1.2 Applications stables et rigidification : définitions

Nous allons ici encore élargir notre espace de modules en y ajoutant certaines applications de courbes sources réductibles.

Définition 2.1 (Application stable). Une applications $\mu: C \rightarrow X$ où X est une variété projective et C une courbe préstable de genre 0 à n points marqués est **stable** si toute branchette de C envoyée par μ à un point est stable, c'est-à-dire contient au moins trois points spéciaux.

Un **automorphisme** d'une application μ sur une courbe préstable C est comme d'habitude un automorphisme ϕ de C tel que $\mu \circ \phi = \mu$.

Propriété 2.2. *Une application sur une courbe préstable est stable si et seulement si elle a un nombre fini d'automorphismes.*

Démonstration. Soit $\mu: C \rightarrow X$ une application stable. Si E est une branchette stable de C , alors pour tout isomorphisme $\phi: C \rightarrow C$ de μ la restriction $\phi|_E$ est l'identité. Si E est une branchette instable, alors par hypothèse son image n'est pas un point mais une courbe. Donc, par le Lemme 2.1, le nombre d'automorphismes de $\mu|_E$ est fini. Donc $|\text{Aut}(\mu)|$ est fini.

Supposons maintenant que μ est préstable mais non stable; il existe alors une branchette instable E dont l'image par μ est un point. Les automorphismes de $\mu|_E$ sont alors exactement les automorphismes de E , et cette branchette étant instable elle admet un nombre infini d'automorphismes. Donc $|\text{Aut}(\mu)|$ est infini. L'équivalence est donc prouvée. \square

Une **famille** d'applications depuis des courbes préstabes est une famille de courbes préstabes $C \rightarrow B$ munie d'un morphisme $\mu: C \rightarrow X$. Une telle famille est **stable** si la restriction de μ à chaque courbe fibre est une application stable.

Le foncteur du problème de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ associée à tout schéma B l'ensemble $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)(B)$ des familles sur B d'application stables dans X représentant β modulo les automorphismes. La variété projective X étant par définition plongée dans un espace projectif \mathbb{P}^r , l'espace de modules lui correspondant sera également un sous-schéma de celui de \mathbb{P}^r , que nous commencerons donc par construire.

L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ n'est pas non-singulier, et présente des singularités quotient : il s'agit en fait d'un orbifold, localement le quotient d'une variété lisse par un groupe fini. Les variétés lisses locales peuvent être obtenues comme espaces de modules fins d'un problème rigidifié.

Pour le moment, nous considérerons $X = \mathbb{P}^r$. Soit V un espace vectoriel (de dimension $r+1$) tel que $X = \mathbb{P}(V)$. On a alors $V^\vee = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$ (les polynômes de degré 1 étant les formes linéaires), et à tout $t \in V^\vee$ correspond l'hyperplan $\ker t \subset V$, qui donne un diviseur (t) dans X . Soit $\mathbf{t} := (t_0, \dots, t_r)$ une base de V^\vee .

Définition 2.2 (Famille stable \mathbf{t} -rigide). Une **famille \mathbf{t} -rigide** d'applications de degré d depuis des courbes rationnelles à n points marqués dans $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V)$ est donnée par $(C \xrightarrow{\pi} B, \{p_i\}_{1 \leq i \leq n}, \{q_{i,j}\}_{0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq d}, \mu: C \rightarrow \mathbb{P}^r)$ où

1. $(C \rightarrow B, \{p_i\}_i, \mu)$ est une famille d'applications n -pointées stables de degré d ;
2. $(C \rightarrow B, \{p_i\}_i \cup \{q_{i,j}\})$ est une famille de courbes stables à

$$m := n + d(r+1)$$

points marqués;

3. pour tout $i \in [0, r]$, on a $\mu^*(t_i) = \sum_{j=1}^d q_{i,j}$ en tant que diviseurs de Cartier.

Ici, les sections ayant une image de codimension 1 dans C qui est une variété non singulière, elles permettent de définir des diviseurs effectifs que l'on note par abus $q_{i,1} + \dots + q_{i,d}$ pour $0 \leq i \leq r$. La condition 3 implique que sur chaque fibre de C , l'image réciproque de chaque hyperplan (t_i) est un ensemble de d points, soit l'image de la courbe fibre par μ coupe (t_i) de façon transverse en d points; plus précisément si la restriction de μ à une branchette de cette courbe est de degré d' , alors l'image de cette branchette aura d' points d'intersection avec chaque (t_i) . La condition 2 implique que les sections $q_{i,j}$ sont disjointes des p_i et des points marqués, ainsi qu'entre elles; ainsi les points d'intersection avec les hyperplans ne sont pas des points spéciaux.

On définit le foncteur du problème de modules rigidifié en posant que $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})(B)$ est l'ensemble des familles \mathbf{t} -rigides d'applications au-dessus de B .

2.2 Construction de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$

2.2.1 Espace de modules fin $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$ des applications rigides

Avant de construire l'espace de modules du problème rigidifié, montrons un résultat permettant d'obtenir des morphismes dans l'espace projectif.

Lemme 2.2. *Pour V un k -espace vectoriel et \mathcal{L} un faisceau de \mathcal{O}_X -modules localement libre sur un k -schéma X , une application linéaire $V \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$ engendre un morphisme de \mathcal{O}_X -modules $V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$.*

Démonstration. Notons T l'application linéaire $V \rightarrow \mathcal{L}$. Pour tout ouvert $U \subset X$, et pour tout $v \otimes f \in \Gamma(U, V \otimes \mathcal{O}_X) = V \otimes \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on peut définir

$$\overline{T}_U(v \otimes f) := f \cdot \text{res}_{X,U}^{\mathcal{L}}(T(v)),$$

où $f \cdot$ est l'action de f sur le $\mathcal{O}_X(U)$ -module $\mathcal{L}(U)$. Il faut donc montrer que l'assignation $U \mapsto \overline{T}_U$ définit un morphisme de faisceaux $\overline{T}: V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$.

Il suffit de s'assurer que, pour toute inclusion $\iota: W \hookrightarrow U$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes \mathcal{O}_X)(U) & \xrightarrow{\text{res}_{U,W}^{\mathcal{O}_X}} & (V \otimes \mathcal{O}_X)(W) \\ \overline{T}_U \downarrow & & \downarrow \overline{T}_W \\ \mathcal{L}(U) & \xrightarrow{\text{res}_{U,W}^{\mathcal{L}}} & \mathcal{L}(W) \end{array}$$

est commutatif. Soit $v \otimes f \in \Gamma(U, V \otimes \mathcal{O}_X)$. Alors

$$\begin{aligned} \text{res}_{U,W}^{\mathcal{L}} \circ \overline{T}_U(v \otimes f) &= \text{res}_{U,W}^{\mathcal{L}}(f \cdot \text{res}_{U,W}^{\mathcal{L}}(T(v))) \\ &= \text{res}_{U,W}^{\mathcal{O}_X}(f) \cdot \text{res}_{U,W}^{\mathcal{L}}(\text{res}_{X,U}^{\mathcal{L}}(T(v))) && \text{car l'action commute avec les} \\ &= \text{res}_{U,W}^{\mathcal{O}_X}(f) \cdot \text{res}_{X,W}^{\mathcal{L}}(T(v)) && \text{res}_{U,V} \text{ pour un } \mathcal{O}_X\text{-module} \\ & && \text{par fonctorialité} \\ & && \text{des préfaisceaux} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{T}_W \circ \text{res}_{U,W}^{\mathcal{O}_X}(v \otimes f) &= \overline{T}_W(v \otimes \text{res}_{U,W}^{\mathcal{O}_X}(f)) \\ &= \text{res}_{U,W}^{\mathcal{O}_X}(f) \cdot \text{res}_{X,W}^{\mathcal{L}}(T(v)), \end{aligned}$$

donc le diagramme commute bien et on a obtenu un morphisme de faisceaux. \square

Théorème 2.2. *Il existe un espace de modules fin $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$ représentant le foncteur de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$, et qui est une variété algébrique non singulière.*

Soit $\pi: \overline{\mathcal{U}}_{0,m} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ la famille universelle de courbes stables à m points marqués, avec toujours $m = n + d(r + 1)$, munie des m sections $\{p_i\}_{1 \leq i \leq m}$ et

$\{q_{i,j}\}_{0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq d}$. Ces sections définissent dans la variété non singulière $\overline{\mathcal{U}}_{0,m}$ un diviseur $\sum_j q_{i,j}$, et les faisceaux inversibles associés

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{U}}_{0,m}}(q_{i,1} + \cdots + q_{i,d}).$$

Soit également $s_i \in \mathcal{H}_i(\overline{\mathcal{U}}_{0,m})$ la section représentant $\sum_j q_{i,j}$.

Définition 2.3. Un morphisme $\gamma: B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ est dit **\mathcal{H} -équilibré** si, avec les notations du diagramme suivant pour le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} B \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,m}} \overline{\mathcal{U}}_{0,m} & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \overline{\mathcal{U}}_{0,m} \\ \downarrow \pi_B & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\gamma} & \overline{\mathcal{M}}_{0,m} \end{array}$$

on a :

- pour tout $i \in [1, r]$, le \mathcal{O}_X -module $\pi_B^* \bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ est localement libre ;
- pour tout $i \in [1, r]$, l'application naturelle $\pi_B^* \pi_{B,*} \bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \rightarrow \bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ est un isomorphisme.

Ces deux conditions sont équivalentes à l'existence, pour $1 \leq i \leq n$, d'un faisceau inversible \mathcal{F}_i sur B tel que $\bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \pi_B^*(\mathcal{F}_i)$. Alors $\bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ est un faisceau inversible, et tous les \mathcal{H}_i (pour $1 \leq i \leq n$) sont isomorphes.

Lemme 2.3. *Il existe un sous-schéma $Q \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ respectant :*

- l'inclusion $\iota: Q \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ est \mathcal{H} -équilibrée ;
- tout morphisme \mathcal{H} -équilibré $\gamma: B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ se prolonge de façon unique par Q .

Démonstration. On applique [FP96, Proposition 1]. Les diviseurs \mathcal{H}_i et \mathcal{H}_0 ont le même degré sur chaque composante de chaque fibre de $\overline{\mathcal{U}}_{0,m}$, celles-ci étant simplement des lignes rationnelles et le degré des faisceaux inversibles étant celui du diviseur $\sum_j q_{i,j}$. Il existe alors bien Q , unique sous-schéma fermé de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ satisfaisant

- l'existence de faisceaux inversibles \mathcal{F}_i pour chaque i tels que $\iota^* \mathcal{H}_i \otimes \iota^* \mathcal{H}_0^{-1} \cong \iota^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \pi_Q^* \mathcal{F}_i$, équivalente à ce que ι soit \mathcal{H} -équilibré ;
- l'existence pour tout $B \xrightarrow{\gamma} \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$ \mathcal{H} -équilibré, c'est-à-dire muni de faisceaux inversibles \mathcal{F}_i sur B tel que $\bar{\gamma}^* \mathcal{H}_i \otimes \bar{\gamma}^* \mathcal{H}_0^{-1} \cong \pi_B^* \mathcal{F}_i$, d'une prolongation de γ par Q .

□

L'espace Q permet de classifier les familles rigides équilibrées, mais il ne retient pas l'information complète sur le morphisme μ . En effet, les conditions de rigidité et d'équilibre ne dépendent que des intersections avec des schémas zéro, et composer μ avec une multiplication par une matrice (projective) diagonale donnerait les mêmes $q_{i,j}$. Pour obtenir $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$, il faut donc augmenter Q en lui ajoutant le choix des $r + 1 - 1$ facteurs multiplicatifs dans \mathbb{P}^r , c'est-à-dire considérer un fibré sur Q dont les fibres sont les choix de normalisation de μ , des tores algébriques $(\mathbb{C}^\times)^r$. La possibilité de diviser par (par

exemple) la coordonnée homogène 0 de la diagonale, réduisant le nombre de facteurs \mathbb{C}^\times de $r+1$ à r , explique pourquoi les faisceaux $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}$ sont utilisés.

Notons, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\mathcal{G}_i = \pi_{Q,*} \bar{\tau}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}),$$

où π_Q est l'application canonique $Q \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,m}} \overline{\mathcal{U}}_{0,m} \rightarrow Q$. Il s'agit d'un faisceau inversible et il lui correspond donc un fibré en droites; définissons $Y_i \xrightarrow{\tau_i} Q$ comme le fibré en cercles algébriques (vus comme \mathbb{C}^\times) associé, c'est-à-dire le fibré vectoriel privé de sa section zéro. Notons que le faisceau d'image inverse $\tau_i^* \mathcal{G}_i$ sur Y_i a une section tautologique qui, par définition de Y_i , ne s'annule pas, ce qui en donne une trivialisation globale.

Soit

$$Y = Y_1 \times_Q \cdots \times_Q Y_r$$

avec les projections $\rho_i: Y \rightarrow Y_i$, $i = 1, \dots, r$ et $\tau: Y \rightarrow Q$ égal par définition à $\tau_i \circ \rho_i$ pour tout i ; il s'agit d'un fibré en r -tores algébriques sur Q . Définissons la famille :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \overline{\mathcal{U}}_{0,m} \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\tau} & Q \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \end{array} .$$

Par functorialité de l'image inverse pour les faisceaux inversibles, on a

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) &\cong \pi_Y^* \tau^* \iota^* \pi_* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \\ &\cong \pi_Y^* \rho_i^* \tau_i^* \iota^* \pi_* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \\ &\cong \pi_Y^* \rho_i^* \tau_i^* \pi_{Q,*} \bar{\tau}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \\ &\cong \pi_Y^* \rho_i^* \tau_i^* \mathcal{G}_i \end{aligned}$$

qui est trivial donc, par distributivité à isomorphisme canonique près de l'image inverse sur le produit tensoriel, $\bar{\tau}^* \mathcal{H}_i \cong \mathcal{L} := \bar{\tau}^* \mathcal{H}_0$.

La section s_i se ramène à une section $\bar{\tau}^* s_i$ de \mathcal{L} . Les $r+1$ sections ainsi formées ne s'annulent pas simultanément et permettent donc de définir un morphisme $\mu: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}^r$ qui sera construit plus bas. On peut aussi tirer en arrière les sections p_i et $q_{i,j}$ pour en obtenir des sections de π_Y .

Propriété 2.3. *La famille $(\mathcal{U} \xrightarrow{\pi_Y} Y; \{p_i\}_i, \{q_{i,j}\}_{i,j}; \mu)$ est une famille stable \mathbf{t} -rigide.*

Démonstration. Pour tout $y \in Y$, la fibre \mathcal{U}_y est isomorphe à la fibre correspondante de $\overline{\mathcal{U}}_{0,m}$ (par transitivité de la propriété universelle du produit fibré), donc il s'agit d'une courbe stable à n points marqués $p_i(y)$, $q_{i,j}(y)$ (validant la condition 2). Soit E une branchette de \mathcal{U}_y dont l'image par μ est un point; le degré de $\mu|_E$ est donc 0 et, d'après la condition 3, aucun $q_{i,j}$ ne se trouve sur E . Donc, par stabilité, E a trois points spéciaux qui sont soit des nodes soit des p_i , et $(\mathcal{U}, \{p_i\}, \mu)$ est stable, ce qui satisfait la condition 1.

Afin de construire μ explicitement, on peut définir une application linéaire $V^\vee \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U})$ par la règle $t_i \mapsto \bar{\tau}^*(s_i)$ sur la base et en étendant linéairement. On en obtient alors d'après le Lemme 2.2 un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ -modules $V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{L}$, par lequel l'image de la base choisie de V^\vee donne $r + 1$ sections globales de \mathcal{L} . Par [Har77, chapitre II, théorème 7.1 (p. 150)], les $r + 1$ sections globales engendrant \mathcal{L} donnent un morphisme unique $\mu: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}^r$ tel que $\mathcal{L} = \mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ et $\bar{\tau}^*(s_i) = \mu^* t_i$ (en tant que sections) pour $i = 0, \dots, r$. Par construction, $\bar{\tau}^* s_i$ est la section dont le diviseur $\sum_j \bar{\tau}^* q_{i,j}$ est le schéma zéro, et l'hyperplan (t_i) est défini par l'équation $t_i(x) = 0$, donc on a bien l'égalité de diviseurs $\sum_j \bar{\tau}^* q_{i,j} = \mu^*(t_i)$, soit la condition 3 est respectée. \square

Lemme 2.4. *La famille $(\mathcal{U} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} Y; \{p_i\}_i, \{q_{i,j}\}_{i,j}; \mu)$ est universelle en tant que famille \mathbf{t} -rigide.*

Démonstration. Soit $(\omega: S \rightarrow B; \{a_i\}, \{b_{i,j}\}; \nu: S \rightarrow \mathbb{P}^r)$ une famille d'applications stables de degré d \mathbf{t} -rigide; comme elle contient une famille sous-jacente de courbes stables à m points marqués et correspond donc à un morphisme unique $\lambda: B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$. Considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} B \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,m}} \overline{\mathcal{U}}_{0,m} \cong S & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \overline{\mathcal{U}}_{0,m} \\ \pi_B = \omega \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\lambda} & \overline{\mathcal{M}}_{0,m} \end{array} .$$

Montrons dans un premier temps que λ est \mathcal{H} -équilibré. Encore d'après [Har77, chapitre II, théorème 7.1 (p. 150)] et le Lemme 2.2, le morphisme ν est induit par une application linéaire $\psi: V^\vee \rightarrow \nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))(S)$. Pour $1 \leq i \leq r$, la section globale $\psi(t_i)$ du \mathcal{O}_S -module $\nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ admet comme schéma zéro le diviseur $\sum_{j=1}^d b_{i,j}$ sur S par la condition 3 de transversalité de la \mathbf{t} -stabilité. En outre, la section globale $\bar{\lambda}^*(s_i)$ du \mathcal{O}_S -module $\bar{\lambda}^* \mathcal{H}_i$ admet également pour schéma zéro le diviseur $\sum_j b_{i,j}$. On a donc deux paires de faisceau inversible et section globale donnant le même diviseur de Cartier effectif, donc d'après [FP96, lemme 1 (p. 15)] il existe un unique isomorphisme $\bar{\lambda}^* \mathcal{H}_i \cong \nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ faisant correspondre les deux sections. L'existence d'un tel isomorphisme est valable pour tout $i \in [0, r]$, en particulier $i = 0$, et donc pour tout autre $i \in [1, r]$ on a $\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \mathcal{O}_S$. Comme ω est un morphisme plat par hypothèse, $\mathcal{O}_S \cong \omega^* \mathcal{O}_B$ et λ est bien \mathcal{H} -équilibré.

Par la propriété universelle de $\iota: Q \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$, le morphisme \mathcal{H} -équilibré λ se prolonge par Q de façon unique. Notons donc $\lambda_0: B \rightarrow Q$ tel que $\iota \lambda_0 = \lambda$.

Du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
& & \bar{\lambda} & & \\
& \searrow & & \nearrow & \\
S & \xrightarrow{\lambda_0} & Q \times_{\overline{\mathcal{M}_{0,m}}} \overline{\mathcal{U}_{0,m}} & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \overline{\mathcal{U}_{0,m}} \\
\pi_B \downarrow & & \downarrow \pi_Q & & \downarrow \pi \\
B & \xrightarrow{\lambda_0} & Q & \xrightarrow{\iota} & \overline{\mathcal{M}_{0,m}} \\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & \lambda & &
\end{array}$$

on tire un isomorphisme canonique $\pi_{B,*} \bar{\lambda}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \lambda_0^* \mathcal{G}_i$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0^* \mathcal{G}_i &= \lambda_0^* \pi_{Q,*} \bar{\tau}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \lambda^* \iota_* \pi_{Q,*} \bar{\tau}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \\
&\cong \lambda^* \pi_* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \pi_{B,*} \bar{\lambda}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}).
\end{aligned}$$

L'isomorphisme $\bar{\lambda}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \mathcal{O}_S$, qui précédemment donnait la \mathcal{H} -stabilité de λ , donne également une section canonique de $\bar{\lambda}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ venant de la section génératrice de \mathcal{O}_S (donc non nulle partout), et $\pi_* \bar{\lambda}^* (\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \lambda^* \mathcal{G}_i$ donne une section ne s'annulant nulle part (*i.e.* à valeurs dans le cercle algébrique \mathbb{C}^\times) de $\lambda^* \mathcal{G}_i$. Ceci étant vrai pour tout i , on obtient donc une section canonique η du fibré en cercles Y , d'où en composant avec λ_0 un morphisme canonique $\eta_0: B \rightarrow Y$.

Considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
B \times_Y \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\
\downarrow & & \downarrow \pi_Y \\
B & \xrightarrow{\eta_0} & Y
\end{array}$$

On a $B \times_Y \mathcal{U} = B \times_{\iota \circ \tau \circ \eta_0, \overline{\mathcal{M}_{0,m}}, \pi} \overline{\mathcal{U}_{0,m}}$ par composition des produits fibrés, et on avait $S = B \times_{\iota \circ \lambda_0, \overline{\mathcal{M}_{0,m}}, \pi} \overline{\mathcal{U}_{0,m}}$. Il nous faut montrer que $\iota \circ \tau \circ \eta_0 = \iota \circ \lambda_0$ soit, l'inclusion ι étant monique, que $\tau \circ \eta_0 = \lambda_0$ ou encore $\tau \circ \eta \circ \lambda_0 = \lambda_0$, ce qui est évidemment vrai car η est une section de τ . Donc $S \cong B \times_Y \mathcal{U}$. \square

On a donc une famille universelle sur un espace de modules, et le Théorème 2.2 est prouvé. \square

2.2.2 Recollement des espaces rigides

D'après le théorème de Bertini ([Har77, chapitre II, théorème 8.18 (p. 179)]), pour tout i , l'ensemble des hyperplans ayant une intersection non triviale avec le diviseur $\sum_j q_{i,j}$ est une partie dense de $\mathbb{P}(V^\vee) = (\mathbb{P}(V))^\vee$, donc pour toute famille d'applications stables il existe un choix de base de V^\vee la rendant rigide.

Il en vient que les $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ recouvrent $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$ (si il existe), et qu'il peut être construit à partir de ces espaces rigidifiés.

Soit $G_{r,d} = \prod_{i=0}^r \mathcal{S}_d$, où \mathcal{S}_d est le groupe symétrique des permutations de d éléments. Le groupe symétrique \mathcal{S}_d opère, pour i fixé, sur $\{q_{i,j}\}_{1 \leq j \leq d}$ par permutation des points marqués, donc il agit de même sur la famille \mathbf{t} -rigide $(C; \{p_i\}, \{q_{i,j}\}; \mu)$. L'action sur le diviseur $\sum_j q_{i,j}$ est quant à elle triviale (le groupe de Chow étant abélien). On a donc finalement une action

$$G_{r,d} \circlearrowleft \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}),$$

$$(\sigma_i)_{0 \leq i \leq r} \cdot (C; \{p_i\}, \{q_{i,j}\}; \mu) = (C; \{p_i\}, \{q_{i,\sigma_i(j)}\}; \mu).$$

Plus précisément, en notant ϕ l'isomorphisme naturel $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}) \xrightarrow{\simeq} \text{hom}(\bullet, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}))$, et en notant $[\mu]$ pour la (classe d'isomorphisme de la) famille $(C; \{p_i\}, \{q_{i,j}\}; \mu)$, on a un morphisme $\phi_B(\sigma \cdot [\mu]) \in \text{hom}(B, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}))$. On définit alors, pour $b \in B$,

$$\bar{\sigma}(\phi_B([\mu])(b)) := \phi_B(\sigma \cdot [\mu])(b).$$

Lemme 2.5. *Le groupe $G_{r,d}$ agit sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ par $\sigma \cdot m = \bar{\sigma}(m)$.*

Démonstration. Tout d'abord, tout point de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ peut bien s'écrire $\phi_B([\mu])(b)$ pour certains $B, b, [\mu]$ puisque, par exemple, l'identité $\phi_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}), \{p_i\}, \{q_{i,j}\}, \mu)$ est surjective.

Il nous faut montrer que, si un point de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ s'écrit $\phi_B([\mu])(b)$ de plusieurs façons différentes, l'effet de $\bar{\sigma}$ est le même de sorte que $\bar{\sigma}$ soit un morphisme bien défini. Soient $\phi_X([\alpha])(x) = \phi_S([\beta])(s)$ (on fera l'abus de confondre la famille $[f]$ avec sa courbe source). Pour tous $a \in [\alpha], b \in [\beta]$, les points $\phi_X([\alpha])_*(a)$ et $\phi_S([\beta])_*(b)$ appartiennent à la même fibre F de $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$. L'action de σ ne faisant que permuter les sections, les courbes sous-jacentes sont isomorphes à leurs images; en particulier le point $\phi_X(\sigma \cdot [\alpha])_*(\sigma \cdot a)$ dans $\sigma \cdot [\alpha]$ correspondant à l'image de a est identique au point a de $\sigma \cdot [\alpha]$, et il en est de même pour l'image de b dans $\sigma \cdot [\beta]$. On en déduit que les fibres après transformation sont identiques, et donc $\phi_X(\sigma \cdot [\alpha])(x) = \phi_S(\sigma \cdot [\beta])(s)$, soit $\bar{\sigma}(\phi_X([\alpha])(x)) = \bar{\sigma}(\phi_S([\beta])(s))$ et l'application $\bar{\sigma}$ est bien définie.

Les propriétés de l'action pour $\bar{\sigma}$ découlent des propriétés de la composition dans $\text{hom}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}), \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}))$. \square

On écrira $\sigma \cdot \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ pour l'image de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ après action par σ (qui est isomorphe à $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ sauf de façon pointée).

Théorème 2.3. *Les $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})/G_{r,d}$ se recollent de façon canonique en nombre fini pour former un schéma $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$.*

Démonstration. [FP96, proposition 4 (p. 19)] L'idée est de définir $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}, \mathbf{s}) \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ comme la partie où les diviseurs $\mu^*(s_0), \dots, \mu^*(s_r)$ sont disjoints et disjoints des sections p_i ainsi que donnés par des sections étales (*i.e.* plates de dimension relative 0 dont la

différentielle est un isomorphisme des espaces tangents en chaque point), de sorte que l'on puisse définir un revêtement galoisien de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}, \mathbf{s})$ dont la fibre en un point est l'ensemble des ordres possibles des points envoyés par l'application stable aux hyperplans $\ker(s_i)$, et dont le groupe d'automorphismes équivariants pour la monodromie est $G_{r,d}$. Des isomorphismes $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}, \mathbf{s})/G_{r,d} \cong \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ sont alors exhibés, et ceux-ci respectent les conditions de cocycle de [Har77, chapitre II, exercice 2.12] pour le recollement. \square

On obtient également, en suivant le recollement, une famille $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Nous allons l'expliciter sur un ouvert $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d}$. Pour tout $\sigma \in G_{r,d}$, on a $\overline{\sigma^{-1}} = \overline{\sigma}^{-1}$. On peut donc définir le tiré arrière

$$\sigma \cdot \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}) := \sigma \cdot \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}) \times_{\overline{\sigma^{-1}}, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}), \pi} \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$$

avec l'application canonique $\overline{\sigma}^{-1} : \sigma \cdot \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}) \rightarrow \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$. Par composition des produits fibrés, $\overline{\sigma}^{-1}$ est inversible, d'inverse $\overline{\sigma}_*$. Par la même propriété de composition, pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in G_{r,d}$ on a $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})) = (\sigma_2 \sigma_1) \cdot \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$ et $\overline{\sigma_2 \sigma_1} = \overline{\sigma_2} \circ \overline{\sigma_1}$, et $\overline{\mathbb{1}}_* = \mathbb{1}_{\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})}$. On a donc bien défini une action de $G_{r,d}$ sur $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})$, et la famille sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d}$ est $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d}$.

La famille $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ est la famille tautologique; de façon équivalente sur chaque ouvert $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d}$ on a $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d} = \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)} \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Cependant la famille n'est pas universelle : il n'y a pas d'espace de modules fin. Cela revient à dire que la famille tautologique n'est pas globalement \mathbf{t} -rigide pour *tous* les \mathbf{t} , mais que chacune des ses restrictions à un $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d}$ est bien \mathbf{t} -rigide.

Notons ϕ^\dagger l'isomorphisme naturel $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}) \xrightarrow{\cong} \text{hom}(\bullet, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}))$, q^\dagger la surjection quotient $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t}) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d}$ et ι^\dagger l'injection $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \mathbf{t})/G_{r,d} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Pour tout schéma B et toute (classe d'isomorphisme d'une) famille $C \rightarrow B$, en notant \mathbf{t} une base pour laquelle la famille est \mathbf{t} -rigide, on pose $\phi_B(C) = \iota^\dagger \circ q^\dagger \circ (\phi_B^\dagger(C)) : B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$; par les isomorphismes utilisés pour le recollement ce morphisme ne dépend pas de \mathbf{t} et est donc bien défini. En utilisant le fait que l'injection du recollement ι^\dagger commute avec ces isomorphismes, on définit ainsi une application naturelle $\phi : \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \text{hom}(\bullet, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d))$.

Propriété 2.4. *Le schéma $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ est un espace de modules grossier pour le problème du foncteur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$.*

Démonstration. Il y a deux propriétés à vérifier. La première est l'isomorphisme $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)(\text{Spec } \mathbb{C}) \xrightarrow{\phi_{\text{Spec } \mathbb{C}}} \text{hom}(\text{Spec } \mathbb{C}, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d))$. Soit $g : \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Comme $|\text{Spec } \mathbb{C}|$ est constitué d'un point, l'application d'espace topologiques sous-jacente $|g|$ revient à sélectionner un point dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$.

Donc il existe \mathbf{t} telle que $\text{im } g \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})/G_{r,d}$. Formons le produit fibré $\text{Spec } \mathbb{C} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})} \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$; la fibre au-dessus de l'unique point de $\text{Spec } \mathbb{C}$ est celle au-dessus de $g(\mathbb{C})$. Il s'agit d'une famille \mathbf{t} -rigide, qui provient du tiré-arrière de $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ selon $\phi_{\text{Spec } \mathbb{C}}^{\mathbf{t}}(C)$. On voit donc que l'attribution $g \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C} \times_{g, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})} \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$ est bien inverse à $\phi_{\text{Spec } \mathbb{C}}$.

Pour la seconde propriété de l'espace de modules grossier, soit \mathcal{E} un schéma muni d'une transformation naturelle $\psi: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}) \rightarrow \text{hom}(\bullet, \mathcal{E})$. On a naturellement un morphisme $\gamma: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}) \rightarrow \mathcal{E}$ donné par la famille tautologique : $\gamma := \psi_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})}(\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})) \in \text{hom}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}), \mathcal{E})$. On cherche à montrer que $\psi = \dot{\gamma} \circ \phi$ où $\dot{\gamma}$ est la transformation naturelle $\text{hom}(\bullet, \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})) \rightarrow \text{hom}(\bullet, \mathcal{E})$ induite par la composition avec γ . Soient B un schéma, $C \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})(B)$ une famille d'applications stables et \mathbf{t} est une base telle que C soit \mathbf{t} -rigide. En remarquant que C est le tiré-arrière de $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ selon $\phi_B^{\mathbf{t}}(C)$, on a le diagramme de naturalité pour ψ :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})(B) & \xleftarrow{(\phi_B^{\mathbf{t}}(C))^*} & \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}) \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}) \right) \\ \left(\psi|_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})} \right)_B \downarrow & & \downarrow \left(\psi|_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})} \right)_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})} \\ \text{hom}(B, \mathcal{E}) & \xleftarrow{\bullet \circ \phi_B^{\mathbf{t}}(C)} & \text{hom} \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}), \mathcal{E} \right) \end{array}$$

où l'on considère $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ comme un sous-foncteur de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$ en faisant un choix d'ordre pour les $q_{i,j}$ de la famille \mathbf{t} -rigide. Donc, en réintroduisant $\iota^{\mathbf{t}} q^{\mathbf{t}}$, on a bien

$$\psi_B \left(\underbrace{(\phi_B^{\mathbf{t}}(C))^*}_{\mathcal{C}} \left(\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}) \right) \right) = \underbrace{\psi_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})}(\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}))}_{\dot{\gamma}} \circ \underbrace{(\iota^{\mathbf{t}} \circ q^{\mathbf{t}} \circ (\phi_B^{\mathbf{t}}(C)))}_{\phi_B(C)}.$$

Donc ψ se prolonge par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$, qui est un espace de modules grossier. \square

Remarque 2.1. L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d})$ est bien propre [FP96, section 4.2 (p.22)], et c'est une variété projective [FP96, section 4.3] (on parle de variété projective complète).

2.2.3 Plongement d'une variété projective

Revenons maintenant au cas où X est une variété projective; on a donc une immersion $\iota: X \rightarrow \mathbb{P}^r$ (le choix de r et de ι n'est pas canonique) telle que le morphisme structural $X \rightarrow \mathbb{A}$ se prolonge en $B \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{A}$. Soit $\beta \in A_1 X$ une classe d'homologie et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $\iota_* \beta$ soit la classe d'une ligne avec multiplicité d : $\iota_* \beta = d[\text{ligne}]$. On définit alors le foncteur de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ de même que précédemment, en donnant sa valeur sur un schéma B comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles d'applications stables μ dans X représentant β , *i.e.* telles que $\mu_*[\text{dom } \mu] = \beta$, ainsi que le foncteur du problème rigidifié $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t})$ pour une base $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_r)$ de $V^\vee = \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$.

Théorème 2.4. *Il existe un sous-schéma fermé $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t}) \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ satisfaisant la propriété suivante : pour toute famille \mathbf{t} -rigide $(\pi_B : C \rightarrow B; \{\mathbf{b}_i\}; \{\mathbf{c}_{i,j}\}; \nu)$ d'applications n -pointées stables dans \mathbb{P}^r de degré \mathbf{d} , le morphisme canonique $B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ se prolonge par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t})$ si et seulement si ν se prolonge par X selon ι et chaque fibre de π_B est une application représentant β .*

Démonstration. Soit $(\mathcal{U} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}); \{\mathbf{p}_i\}, \{\mathbf{q}_{i,j}\}; \mu)$ l'espace de modules du Théorème 2.2 avec sa famille universelle. Soit \mathcal{J}_X le faisceau d'idéaux de $X \subset \mathbb{P}^r$; le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ sur l'espace projectif étant ample (c.f. [Har77, chapitre II, exemple 7.6.1]), il existe un entier $\ell \gg 0$ tel que $\mathcal{J}_X(\ell) = \mathcal{J}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(\ell)$ soit engendré par les sections globales $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}_X(\ell)) =: I_X(\ell)$. Comme $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ est de genre 0 et π est plat, le faisceau $\pi_* \mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(\ell)$ est localement libre (i.e. est un fibré vectoriel), et $I_X(\ell)$ en donne des sections. Soit Z le schéma zéro de ces sections; la restriction de μ à la sous-famille $\pi^{-1}(Z)$ se prolonge bien selon ι . On peut écrire Z comme une union disjointe finie de composantes connexes, et l'image directe de la classe fondamentale est constante sur chacune de ces composantes connexes. On définit alors $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t}) \subset Z \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ comme l'union des composantes de Z consistant des applications représentant β .

Il reste à montrer que l'espace construit vérifie bien la propriété demandée. Soit $(\pi_B : C \rightarrow B; \{\mathbf{b}_i\}; \{\mathbf{c}_{i,j}\}; \nu)$ une famille \mathbf{t} -rigide, et soit $\Upsilon : B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ le morphisme canonique.

Supposons que qu'il existe $\nu : B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t})$ prolongeant Υ . On a le diagramme totalement cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\nu_*} & \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t}) & \xrightarrow{\zeta_*} & \overline{\mathcal{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}) \\ \pi_B \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\nu} & \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t}) & \xrightarrow{\zeta} & \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \mathbf{d}, \mathbf{t}) \end{array}$$

où $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t})$ est l'image réciproque $\pi^{-1}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t}))$ selon l'inclusion ζ . La famille étant \mathbf{t} -rigide, on a $\nu = \mu \circ \Upsilon_* = \mu \zeta_* \nu_*$, et donc ν se prolonge bien par X . Comme ν se prolonge par $\overline{\mathcal{U}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t})$ sur laquelle, par définition, la classe image est β , la restriction de ν aux fibres de π_B représente bien β .

Supposons à l'inverse que ν se prolonge par X et que sa restriction à chaque fibre de π_B représente β . Notons $(s_i)_{i \in I}$ les sections globales dans $I_X(\ell)$ engendrant $\mathcal{J}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(\ell)$. Si les s_i sont nulles en $p \in X$ (dans une expression locale) alors $\mathcal{J}_X(\ell)_p$ est nul aussi, et $\mathcal{J}_{X,p}$ l'est également, ce qui implique que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r,p} \otimes \mathcal{J}_{X,p} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r,p}$, ce qui est en accord avec le fait que X est le support de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}/\mathcal{J}_X$, s. Si au contraire il existe $s_i(p) \neq 0$, alors $\mathcal{J}_{X,p}$ ne peut pas être un idéal propre de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r,p}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r,p}/\mathcal{J}_{X,p} = 0$, ce qui contredit le fait que $p \in X = \text{supp } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}/\mathcal{J}_X$ (les sections globales de $\mathcal{J}_X(\ell)$ sont les polynômes homogènes de degré ℓ s'annulant sur X). Donc Υ se prolonge par Z , et comme l'application sur la courbe universelle représente évidemment β , Υ se prolonge même par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta, \mathbf{t})$ qui respecte donc la propriété demandée. \square

On peut de même que précédemment recoller les espaces de modules des

problèmes rigidifiés pour obtenir un espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ qui est un sous-schéma fermé de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$.

Propriété 2.5. *L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ est indépendant de l'immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ utilisée.*

Démonstration. Soient r, r' deux dimensions suffisantes et $\iota: X \rightarrow \mathbb{P}^r, \iota': X \rightarrow \mathbb{P}^{r'}$ deux immersions. Notons $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)'$ les espaces obtenus avec ι et ι' respectivement.

Si par exemple $r > r'$ alors on a l'immersion canonique $\iota_{r-r'}: \mathbb{P}^{r'} \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ et on peut donc se ramener à deux immersions ι et $\iota_{r-r'} \circ \iota'$ dans \mathbb{P}^r .

Supposons donc que $r = r'$, d'où il existe un automorphisme α de \mathbb{P}^r tel que $\iota = \alpha \circ \iota'$. Soit $(\pi_B: C \rightarrow B; \{b_i\}; \nu)$ une famille d'applications stables dans \mathbb{P}^r . Il est clair que ν se prolonge selon ι si et seulement si il se prolonge par ι' (on le voit en pré-composant la restriction à X de α ou α^{-1}). Donc $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)'$ ont la même propriété universelle, et ils sont isomorphes. \square

Remarque 2.2. Si X est une variété projective convexe (i.e. $H^1(\mathbb{P}^1, f^*(\mathcal{T}_X)) = 0$ pour tout $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ où \mathcal{T}_X est le faisceau tangent $\Omega_{X/\mathbb{C}}^\vee$ avec le faisceau cotangent $\Omega_{X/\mathbb{C}} = \Delta_{X \times_{\mathbb{C}} X}^*(\mathcal{J}_{X \subset \Delta} / \mathcal{J}_{X \subset \Delta}^2)$), par exemple une variété homogène G/H , alors [FP96, section 5.2]

$$\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) = \dim X + \int_{\beta} c_1(\mathcal{T}_X) + n - 3$$

où $c_1(\bullet)$ est l'opérateur de première classe de Chern pour les fibrés vectoriels.

Chapitre 3

Anneau de cohomologie quantique

3.1 Invariants de Gromov–Witten

3.1.1 Morphismes d'évaluation et étude du bord

Les espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ bénéficient naturellement de deux types de morphismes :

Les morphismes d'oubli : De façon similaire aux morphismes d'oubli $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, on peut définir des morphismes d'oubli (ou de contraction) $\eta_{n+1}: \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(X, \beta) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ oubliant le dernier (le $n+1$ -ième) point marqué. En effet, si une branchette dont l'image est un point devient instable, on peut la contracter et obtenir canoniquement une application bien définie puisque l'application originale était déjà constante. L'ordre dans lequel on oublie les points marqués ne change pas le processus, à renumérotation près en cas de besoin, et on a plus généralement des morphismes $\eta_{I \setminus J}: \overline{\mathcal{M}}_{0,I}(X, \beta) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,J}(X, \beta)$ pour $J \subset I$. On a également un morphisme $\vartheta_n: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ oubliant l'application (et contractant les branchettes non stables sur lesquelles l'application n'était pas constante).

Les morphismes d'évaluation : De façon tautologique, on peut définir des morphismes d'évaluation

$$\begin{aligned} \text{év}_i: \quad & \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow X \\ & (C \rightarrow B, \{p_j\}_{1 \leq j \leq n}, \mu) \mapsto \mu(p_i). \end{aligned}$$

Ces morphismes sont plats ([KV07, lemme 2.5.1 (p. 64)]), et permettent de construire également un morphisme (non plat)

$$\text{év} = (\text{év}_1, \dots, \text{év}_n): \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow X^n.$$

Ces morphismes permettent d'étudier plus en détail $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ et son bord $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) = \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) \setminus \mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)$.

Notons tout d'abord que, pour une application stable $[\mu] = (\pi_B: C \rightarrow B; p_1, \dots, p_{n+1}; \mu)$ qui n'a aucun automorphisme, on peut identifier μ à la restriction de év_{n+1} à la fibre $\mathcal{U}_\mu := \eta_{n+1}^{-1}([\mu])$. Cette fibre est constituée des placements possibles de la section pour le $(n+1)$ -ième point marqué sur $(C; p_1, \dots, p_n)$. Procédons, comme d'habitude, fibre par fibre. Plaçons-nous sur la fibre C_b . Si $p_{n+1}(b)$ est disjoint des autres points spéciaux, on peut simplement évaluer μ avec $\text{év}_{n+1}|_{C_b}$ et obtenir $\mu(p_{n+1}(b))$. On a de cette façon une identification avec $C_b \setminus \{\text{points spéciaux}\}$. Supposons maintenant que $p_{n+1}(b)$ soit placé sur un point spécial q . On doit alors stabiliser la courbe à ce point (la courbe totale peut être instable). La branchette ainsi ajoutée est stable, donc l'application stable peut y être constante, et on définit la valeur de év_{n+1} sur cette nouvelle courbe comme $\mu(q)$. L'identification est donc complète.

Les propriétés du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$. En particulier, on y trouve des diviseurs de bord $D(I, \beta_1|J, \beta_2)$. On dit qu'une classe $\beta_i \in A_1X$ est effective si il existe une application stable la représentant. Si β_1, β_2 sont deux classes effectives telles que $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $I, J \subset [1, n]$ sont une partition de $[1, n]$: $I \sqcup J = [1, n]$, et $\beta_1 = 0$ (resp. $\beta_2 = 0$) implique $|I| \geq 2$ (resp. $|J| \geq 2$), alors un point du diviseur $D(I, \beta_1|J, \beta_2)$ sera $(C; p_1, \dots, p_n; \mu)$ où $C = C_I \cup C_J$ et où les points marqués indexés par I (resp. par J) sont dans C_I (resp. dans C_J) et $\mu_*[C_I] = \beta_1, \mu_*[C_J] = \beta_2$. Si I et J sont no vides, on a comme précédemment une décomposition $D(I, \beta_1|J, \beta_2) \cong \overline{\mathcal{M}}_{0, I \cup \{\bullet\}} \times_X \overline{\mathcal{M}}_{0, J \cup \{\bullet\}}$.

Finalement, en notant $D(i, j|k, \ell)$ l'image inverse par les morphismes d'oubli de $D(i, j|k, \ell) \in \mathcal{M}_{0, \{i, j, k, \ell\}}$, soit

$$D(i, j|k, \ell) = \sum_{\substack{I \supset \{i, j\} \\ J \supset \{k, \ell\} \\ \beta_1 + \beta_2 = \beta}} D(I, \beta_1|J, \beta_2),$$

on retrouve l'équivalence rationnelle $D(i, j|k, \ell) = D(i, k|j, \ell) = D(i, \ell|j, k)$.

3.1.2 Classes et invariants de Gromow–Witten

On considérera à partir de ce point que la variété projective X est une variété homogène : $X = G/H$. Notons $\dim X = r$ la dimension de X . Comme il s'agit d'une variété projective, son groupe de Chow bénéficie [Ful98, corollaire 17.4(a) (p. 328)] de l'isomorphisme de dualité de Poincaré $A^k X \cong A_{r-k} X$, $\gamma \mapsto \check{\gamma}$ donné par l'évaluation sur la classe fondamentale $\check{\gamma} = \gamma \frown [X]$. L'isomorphisme inverse sera aussi noté $\check{\bullet} : A_k X \ni \Gamma \rightsquigarrow \check{\Gamma} \in A^{r-k} X$. On identifiera donc les cycles de codimension k avec les classes de cohomologie de degré k . En particulier, la classe fondamentale duale $\check{[X]}$ est le générateur canonique 1_X de $A^r X \cong \mathbb{Z}$.

Étant données n sous-variétés irréductibles $\Gamma_i, i = 1, \dots, n$ de X , on s'inté-

resse au schéma

$$\text{é}v^{-1} \left(\prod_i \Gamma_i \right) = \bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i) \subset \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)$$

constitué des courbes dont les points marqués sont envoyés dans les sous-variétés correspondantes. On note $\Gamma := \prod_i \Gamma_i$.

Lemme 3.1. *Pour un choix générique de $(\Gamma_i)_i$ telles que $\sum_i \text{codim } \Gamma_i = \dim \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)$, l'intersection $\bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i)$ est un ensemble fini de points réduits.*

Démonstration. [FP96, lemme 14 (p. 34)] □

Par « un choix générique » on entend un choix selon des conditions dessinant un ensemble dense parmi les choix possibles de familles de sous-variétés.

Dans A_0X , on a $[\bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i)] = \sum [\text{pt}]$ donc $\int_{\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)} [\bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i)] = \text{card } |\bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i)|$.

Pour $c_1, c_2 \in A^\bullet X$, on note $c_1 \times c_2 = \widetilde{c_1} \times \widetilde{c_2} \in A^\bullet(X^2)$. Il s'agit d'un produit tensoriel : $c_1 \times c_2(\Gamma_1, \Gamma_2) = c_1(\Gamma_1) \times c_2(\Gamma_2)$. Par [Ful98, corollaire 17.4(b) (p. 328)], pour $f_1, f_2: Y \rightarrow X$ et $f = (f_1, f_2)$ on a bien $f^*(c_1 \times c_2) = f_1^*c_1 \smile f_2^*c_2$.

Théorème 3.1. *Pour un choix générique de $(\Gamma_i)_i$ respectant la condition de dimensionnalité, le nombre de courbes passant par les Γ_i est donné par :*

$$\int_{\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)} \left[\bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i) \right] = \int_{\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)} \text{é}v^*(\gamma) \frown [\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)]$$

où γ est le dual de Poincaré $\gamma = \widetilde{[\Gamma]} = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n \in A^\bullet(X^n)$ avec $\gamma_i = \widetilde{[\Gamma_i]}$.

Démonstration. Toujours par dualité de Poincaré sur X ([Ful98, corollaire 17.4(b) (p. 328)]), pour tout morphisme plat $f: Y \rightarrow X$ et toute $(c \otimes \alpha) \in A^k X \otimes A_\ell Y$ on a $f^*(c) \frown \alpha = (G_f)^*[\alpha \times \widetilde{c}] \in A_{\ell-k} Y$ où $G_f: Y \rightarrow X \times Y$ est le graphe de f . En particulier, pour $f = \text{é}v: \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) \rightarrow X^n$ on a dans $A_0 \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)$

$$\text{é}v^*(\gamma) \frown [\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)] = G_{\text{é}v}^*([\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) \times \Gamma]).$$

En suivant simplement les inclusions, on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i) = \text{é}v^{-1}(\prod_i \Gamma_i) & \xrightarrow{G_{\text{é}v} |_{\text{é}v^{-1}(\Gamma)}} & \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) \times \prod_i \Gamma_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) & \xrightarrow{G_{\text{é}v}} & \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) \times X^n \end{array}$$

qui est cartésien, et donc $G_{\text{é}v}^*([\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) \times \Gamma]) = [\bigcap_i \text{é}v_i^{-1}(\Gamma_i)]$. □

Dans la suite, afin de ne pas doubler les cap-produits, on écrira $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} c$ pour indiquer le degré de $c \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta) \in A_0 \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$, soit $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} c \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)]$ ou $(c \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)]) \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)]$. On définit alors :

Définition 3.1 (Invariant de Gromov–Witten). Pour $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^\bullet X$, l’invariant de Gromov–Witten de classe β est :

$$\begin{aligned} \langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma_1 \cdots \gamma_n) &:= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} \text{év}^*(\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} \text{év}_1^*(\gamma_1) \smile \cdots \smile \text{év}_n^*(\gamma_n). \end{aligned}$$

On note aussi $\langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \langle \gamma_1 \cdots \gamma_n \rangle_{0,n}^\beta$. Les classes γ_i sont écrites en argument sous la forme d’un produit car le résultat est indépendant de leur ordre (il s’agit de classes dans $A^\bullet X = H^{2\bullet}(X, \mathbb{Z})$). On remarque également que si les γ_i ne respectent pas la condition de dimension $\sum \text{codim } \tilde{\gamma}_i = \dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ l’invariant de Gromov–Witten correspondant sera nul. On peut obtenir les valeurs d’autres formes simples d’invariants de Gromov–Witten.

- Propriété 3.1.**
1. Si $\beta = 0$ alors $\langle I_{0,3,\beta} \rangle (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = \int_X \gamma_1 \smile \gamma_2 \smile \gamma_3$ pour $\gamma_{1,2,3} \in A^\bullet X$ et les autres formes donnent des invariants nuls.
 2. Si $\gamma_1 \in A^0 X \cong \mathbb{Z}$, soit $\gamma_1 = c_1 \cdot [\tilde{X}]$, alors $\langle I_{0,3,0} \rangle (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = c_1 \int_X \gamma_2 \smile \gamma_3$ et les autres formes donnent des invariants nuls.
 3. Si $\gamma_1 \in A^1 X$ est le dual de Poincaré d’un diviseur et $\beta \neq 0$ alors $\langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \int_\beta \gamma_1 \cdot \langle I_{0,n-1,\beta} \rangle (\gamma_2 \cdots \gamma_n)$

Démonstration. 1 Comme $\beta = 0$, l’application μ doit être constante sur toute sa courbe source. Celle-ci doit donc être une courbe stable, et les applications possibles sont données par leur point image : $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0) = \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \times X$. Les morphismes d’évaluation s’identifient tous à la projection pr_2 sur le second facteur du produit. Par la formule de projection [Ful98, p. 325 (définition 17.3)],

$$\text{pr}_{2,*} \left(\text{pr}_2^* \left(\prod_i \gamma_i \right) \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)] \right) = \smile_i \gamma_i \frown \text{pr}_{2,*} [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)]$$

avec $\text{pr}_{2,*} [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)] = [X] \delta_{\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0), \dim X}$. Par changement de variable fonctoriel [Ful98, §1.4 (p. 13)] on a

$$\begin{aligned} &\int_X \text{pr}_{2,*} \left(\text{pr}_2^*(\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n) \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)] \right) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)} \text{pr}_2^*(\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n) \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)]. \end{aligned}$$

Finalement, en n'appliquant pas la convention de ne pas écrire le cap-produit avec l'espace d'intégration,

$$\begin{aligned} \langle I_{0,n,0} \rangle (\gamma_1 \cdots \gamma_n) &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} \text{pr}_2^* (\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n) \frown [\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)] \\ &= \int_X \smile_i \gamma_i \frown \text{pr}_{2,*} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta). \end{aligned}$$

L'image directe $\text{pr}_{2,*} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ est non nulle seulement si $\dim X = \dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,0)$, c'est-à-dire si $\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n} = 0$. Donc le seul invariant non nul est pour $n = 3$, puisque $\overline{\mathcal{M}}_{0,3} = \{\text{pt}\}$, et on a $\langle I_{0,n,0} \rangle (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = \int_{\{\text{pt}\} \times X} \gamma_1 \smile \gamma_2 \smile \gamma_3 = \int_X \gamma_1 \smile \gamma_2 \smile \gamma_3$.

- 2 [FP96, section 7, p. 35, point (II)]
- 3 [FP96, section 7, p. 35, point (III)]

□

Par changement de variable fonctoriel selon le morphisme d'oubli $\vartheta_n: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, on a

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)} \text{év}_1^*(\gamma_1) \smile \cdots \smile \text{év}_n^*(\gamma_n) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \vartheta_{n,*} (\text{év}_1^*(\gamma_1) \smile \cdots \smile \text{év}_n^*(\gamma_n)).$$

On définit alors la **classe de Gromov–Witten** $I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \vartheta_{n,*} (\text{év}_1^*(\gamma_1) \smile \cdots \smile \text{év}_n^*(\gamma_n))$, qui permet d'écrire $\langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$. Les classes de Gromov–Witten donnent des morphismes

$$I_{0,n,\beta}: (A \bullet X)^{\otimes n} \rightarrow A \bullet \overline{\mathcal{M}}_{0,n}.$$

3.2 Potentiel de Gromov–Witten

3.2.1 Fonctions génératrices et potentiel de Gromov–Witten

Afin de manipuler les invariants de Gromov–Witten, nous allons utiliser leur fonction génératrice, le potentiel de Gromov–Witten. Introduisons dans un premier temps la notion de fonction génératrice en géométrie énumérative. Soit $N(d_1, \dots, d_n)$ une suite d'entiers indexés par $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.2 (Fonction génératrice). On appelle **fonction génératrice** (ou série génératrice) des nombres $N(d_1, \dots, d_n)$ la série formelle

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) := \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 0} \frac{x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}}{d_1! \cdots d_n!} N(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_n]].$$

On écrit aussi, en utilisant les notations de multi-indices, $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n} \frac{x^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!} N(\mathbf{d}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$.

L'utilisation des fonctions génératrices permet de transformer des relations de récurrence entre les nombres $N(\mathbf{d})$ en des équations fonctionnelles ou différentielles sur leurs fonctions génératrices. En particulier, on voit que la dérivée $\partial_i \Phi$, aussi notée Φ_i , de Φ par rapport à sa i -ième variable, est la fonction génératrice pour les nombres $N(d_1, \dots, d_i + 1, \dots, d_n)$.

Les invariants de Gromov–Witten ne sont pas indexés par \mathbb{Z}^n mais par $A_1 X \times (A^\bullet X)^n$. Afin d'éliminer la dépendance en $\beta \in A_1 X$, on collecte les classes en utilisant $\langle I_{0,n} \rangle (\prod \gamma_i) = \sum_{\beta \in A_1 X} \langle I_{0,n,\beta} \rangle (\prod \gamma_i)$. Le passage de la dépendance en $(A^\bullet X)^n$ à une dépendance en \mathbb{Z}^m peut se faire en choisissant une base de $A^\bullet X$.

Soit T_0 un générateur de $A^0 X \cong \mathbb{Z}$; on prend l'identification $T_0 = 1$. Soient également $T_1, \dots, T_p \in A^1 X$ formant une base $\{T_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de $A^1 X$, et $T_{p+1}, \dots, T_m \in A^{>1} X$ complétant la base des groupes de cohomologie supérieurs pour donner une base $\{T_i\}_{0 \leq i \leq m}$ de $A^\bullet X$. Par linéarité des invariants de Gromov–Witten, il suffit de les calculer sur les éléments de la base. On pose alors

$$N_\beta(d_0, \dots, d_m) = \left\langle T_0^{d_0} \cdot T_1^{d_1} \dots T_m^{d_m} \right\rangle_{0, \sum_i d_i}^\beta$$

où les puissances d_i indiquent seulement le nombre de facteurs et pas un produit de classes, et

$$N(d_0, \dots, d_m) = \sum_{\beta \in A_1 X} \left\langle T_0^{d_0} \dots T_m^{d_m} \right\rangle_{0, \sum_i d_i}^\beta.$$

D'après la Propriété 3.1, on peut aussi bien supprimer les facteurs T_0 et $T_i, 1 \leq i \leq n$.

Le **potentiel de Gromov–Witten** $\Phi = \Phi^{\text{GW}}$ est la fonction génératrice des nombres de Gromov–Witten :

$$\Phi(x_0, \dots, x_m) = \sum_{\substack{d_0, \dots, d_m \\ \sum_i d_i \geq 3}} N(\mathbf{d}) \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!}.$$

En considérant les x_i comme des coordonnées dans le groupe de Chow, c'est-à-dire en écrivant $\gamma = \sum_{i=0}^m x_i T_i$, cela correspond à

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\gamma) = \sum_{n \geq 3, \beta} \frac{1}{n!} \langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma^n)$$

par linéarité et car pour tout n il n'existe qu'un nombre fini de classes β telles que $\langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma^n) \neq 0$ (cf. [FP96, lemme 15 (p. 36)]).

Les termes pour $\beta = 0$ donnent un potentiel dit classique $\Phi^{\text{cl}}(\mathbf{x}) = \sum_{d \geq 3} N^{\beta=0}(\mathbf{d}) \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!}$, soit d'après le point 1 de la Propriété 3.1,

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{cl}}(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq m} N^0(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \frac{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}}{3!} \\ &= \sum \frac{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}}{3!} \int_X T_{i_1} \smile T_{i_2} \smile T_{i_3}. \end{aligned}$$

On observe en particulier que les dérivées troisièmes sont

$$\Phi_{ijk}^{\text{cl}}(\mathbf{x}) = \Phi_{ijk}^{\text{cl}} = \langle I_{0,3,0} \rangle (T_i T_j T_k) = \int_X T_i \smile T_j \smile T_k.$$

Pour $0 \leq i, j \leq m$, soit $g_{ij} = \int_X T_i \smile T_j$. Notons $(g^{ij})_{i,j}$ les composantes de la matrice inverse de $(g_{ij})_{i,j}$. On a $[\widetilde{\Delta}] = \sum_{i,j} g^{ij} T_i \times T_j$ pour $[\Delta] \in \mathbf{A}_\bullet(X \times X)$ la classe de la diagonale. Le potentiel de Gromov–Witten classique fournit alors les constantes de structure du cup-produit de $A^\bullet X$ dans la base $\{T_i\}_i$, c'est-à-dire $T_i \smile T_j = \sum_{k,\ell} \Phi_{ijk}^{\text{cl}} g^{k\ell} T_\ell$.

Lemme 3.2 (de scindage). *Soit $D(S_1, \beta_1 | S_2, \beta_2)$ comme dans la sous-section 3.1.1. Notons*

$$\begin{aligned} \iota: D(S_1, \beta_1 | S_2, \beta_2) &= \overline{\mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{\bullet\}}}(X, \beta_1) \times_{\overline{X}} \overline{\mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{\bullet\}}}(X, \beta_2) \\ &\hookrightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{\bullet\}}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{\bullet\}}} \end{aligned}$$

l'inclusion naturelle et $\alpha: D(S_1, \beta_1 | S_2, \beta_2) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta)$ l'inclusion du diviseur. Alors, pour $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^\bullet X$, on a

$$\begin{aligned} \iota_* \alpha^* (\text{év}_1^*(\gamma_1) \smile \dots \smile \text{év}_n^*(\gamma_n)) \\ = \sum_{j,k} g^{jk} \left(\smile_{i_1 \in S_1} \text{év}_{i_1}^*(\gamma_{i_1}) \smile \text{év}_\bullet^*(T_j) \right) \times \left(\smile_{i_2 \in S_2} \text{év}_{i_2}^*(\gamma_{i_2}) \smile \text{év}_\bullet^*(T_k) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Grâce à la propriété de propriété de produit fibré de $D(S_1, \beta_1 | S_2, \beta_2)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(X, \beta) & \xleftarrow{\alpha} & D(S_1, \beta_1 | S_2, \beta_2) & \xrightarrow{\iota} & \overline{\mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{\bullet\}}}(X, \beta_1) \times \overline{\mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{\bullet\}}}(X, \beta_2) \\ \text{év} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{array}{l} \tilde{\text{év}} := \\ \left((\text{év}_{i_1})_{i_1 \in S_1}, \text{év}_\bullet \right) \\ \times \left((\text{év}_{i_1})_{i_2 \in S_2}, \text{év}_\bullet \right) \end{array} \\ X^n & \xleftarrow{p} & X^{n+1} & \xrightarrow{\delta} & X^{n+2} \end{array}$$

où δ est le morphisme diagonal répétant la dernière composante et p la projection oubliant le dernier facteur, et où on fait implicitement suivre év par l'automorphisme de X^{n+2} correspondant à la permutation des facteurs qui fait passer le $(|S_1| + 1)$ -ième (ici le premier \bullet) en avant-dernier. Alors :

$$\begin{aligned} \iota_* \alpha^* (\text{év}_1^*(\gamma_1) \smile \dots \smile \text{év}_n^*(\gamma_n)) &= \iota_* \alpha^* \text{év}^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n) \\ &= \tilde{\text{év}}^* \delta_* p^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n) \\ &= \tilde{\text{év}}^* \delta_*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n \times [\widetilde{X}]) \\ &= \tilde{\text{év}}^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n \times [\widetilde{\Delta}]) \end{aligned}$$

et on obtient le résultat en développant $[\Delta]$ selon la base des T_i avec (g^{ij}) . \square

En utilisant également les morphismes d'oubli $\vartheta_{S_i} : \overline{\mathcal{M}}_{0,S_i}(X, \beta_i) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,S_i}$ ainsi que le morphisme $\varphi : \overline{\mathcal{M}}_{0,S_1 \cup \{\bullet\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,S_2 \cup \{\bullet\}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ qui recolle les courbes selon le point \bullet , on peut reformuler ce résultat en terme des classes de Gromov–Witten : on a $\varphi^* I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \varphi^* \vartheta_{n,*} \text{év}^*(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} (\vartheta_{S_1 \cup \{\bullet\}} \times \vartheta_{S_2 \cup \{\bullet\}})_* \iota_* \alpha^* \text{év}^*(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ et donc

$$\begin{aligned} & \varphi^* I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) \\ &= \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{j,k} g^{jk} I_{0,S_1 \cup \{\bullet\},\beta_1} \left(\prod_{i_1 \in S_1} \gamma_{i_1} \cdot T_j \right) \times I_{0,S_2 \cup \{\bullet\},\beta_2} \left(\prod_{i_2 \in S_2} \gamma_{i_2} \cdot T_k \right). \end{aligned}$$

3.2.2 Cup-produit quantique

En suivant la propriété du potentiel de Gromov–Witten classique, en considérant les dérivées

$$\Phi_{ijk} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{d}, \beta} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{d}}}{\mathbf{d}!} \langle I_{0,n,\beta} \rangle (\mathbf{T}^{\mathbf{d}} T_i T_j T_k),$$

on définit un **cup-produit quantique** \smile sur $A^\bullet X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ en spécifiant que ses constantes de structures sont les dérivées tierces du potentiel de Gromov–Witten :

$$T_i \smile T_j = \sum_{0 \leq k, \ell \leq m} \Phi_{ijk} g^{k\ell} T_\ell.$$

Les dérivées étant symétriques, le produit quantique est immédiatement commutatif. Il admet T_0 comme élément neutre.

Théorème 3.2. *Le produit quantique est associatif, c'est-à-dire que pour tout (i, j) :*

$$\forall (s, t), \sum_{k, \ell} \Phi_{ijk} g^{k\ell} \Phi_{\ell st} = \sum_{k, \ell} \Phi_{j sk} g^{k\ell} \Phi_{i \ell t}.$$

Démonstration. [FP96, théorème 4 (p. 37)] □

En termes du potentiel de Gromov–Witten, l'équation d'associativité correspond à l'équation différentielle WDVV (pour Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde) :

$$\sum_{k, \ell} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g^{k\ell} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_\ell \partial x_s \partial x_t} = \sum_{k, \ell} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_j \partial x_s \partial x_k} g^{k\ell} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_i \partial x_\ell \partial x_t}.$$

On note $QA^\bullet X := A^\bullet X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$. Le cup-produit quantique lui donne une structure d'anneau $(QA^\bullet X, +, \smile)$ que l'on appelle l'anneau de cohomologie quantique.

Comme $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ est un orbifold, il convient de considérer sa cohomologie à coefficients dans \mathbb{Q} , et nous pouvons également prendre celle de X avec coefficients dans \mathbb{Q} ; notons-la $A_{\mathbb{Q}}^\bullet X$. Il y a alors un plongement naturel

$\iota: A_{\mathbb{Q}}^{\bullet}X \hookrightarrow QA^{\bullet}X$ en tant que \mathbb{Q} -espaces vectoriels. Il est possible de construire une présentation de la \mathbb{Q} -algèbre $QA^{\bullet}X$ à partir d'une de $A_{\mathbb{Q}}^{\bullet}X$ (voir [FP96, propositions 9–10 (pp. 45–46)] pour les démonstrations).

Soit $\{z_1, \dots, z_p\}$ une \mathbb{Q} -base de $A_{\mathbb{Q}}^{\bullet}X$ constituée d'éléments homogènes de degré positif (dans l'algèbre graduée); elle donne alors une $\mathbb{Q}[[x]]$ -base de $QA^{\bullet}X$. Soient $\psi_A: \mathbb{Q}[Z_1, \dots, Z_p] \rightarrow A_{\mathbb{Q}}^{\bullet}X$ et $\psi_Q: \mathbb{Q}[[x]][Z_1, \dots, Z_p] \rightarrow QA^{\bullet}X$ les surjections données par $\psi_A(Z_i) = z_i$ et $\psi_Q(Z_i) = z_i$ et par extension \mathbb{Q} - (resp. $\mathbb{Q}[[x]]$ -) linéaire. Soient K_A et K_Q leurs noyaux respectifs. À tout élément f_A de K_A , on peut canoniquement associer un élément f_Q de K_Q .

Soient $f_{1,A}, \dots, f_{s,A}$ des générateurs homogènes de K , soit $A_{\mathbb{Q}}^{\bullet}X$ admet la présentation $A_{\mathbb{Q}}^{\bullet}X = \mathbb{Q}[Z_1, \dots, Z_p]/(f_{1,A}, \dots, f_{s,A})$. Alors $QA^{\bullet}X$ admet la présentation

$$QA^{\bullet}X = \mathbb{Q}[[x]][Z_1, \dots, Z_p]/(f_{1,Q}, \dots, f_{s,Q}).$$

3.3 Variétés de Frobenius et théorie axiomatique

3.3.1 Axiomes pour la théorie de Gromov–Witten

Définition 3.3 (Classes de Gromov–Witten). Un **système à l'arbre de classes de Gromov–Witten** pour X est une famille d'applications $I_{0,n,\beta}: A^{\bullet}(X^n) = (A^{\bullet}X)^{\otimes n} \rightarrow A^{\bullet}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ pour $n \geq 3$ et $\beta \in A^1X$ respectant les axiomes :

Linéarité : chaque application $I_{0,n,\beta}$ est linéaire en toutes ses variables;

Effectivité : si β n'est pas une classe effective alors $I_{0,n,\beta} = 0$;

Équivariance : chaque application $I_{0,n,\beta}$ est équivariante pour l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_n sur $A^{\bullet}X^n$ et $A^{\bullet}\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Degré : si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont des classes homogènes de $A^{\bullet}X$ (soit $\gamma_n \in A^{\deg \gamma_n} X$) alors

$$\deg I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \sum_{i=1}^n \deg \gamma_i - \dim X - \int_{\beta} c_1(X);$$

Classe fondamentale : en notant toujours $\eta_{n+1}: \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ le morphisme oubliant le dernier point marqué, alors

$$I_{0,n+1,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n \cdot \widetilde{[X]}) = \eta_{n+1}^* I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$$

Diviseur : Si $\gamma_{n+1} \in A^1X$ alors

$$\eta_{n+1,*} I_{0,n+1,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_{n+1}) = \left(\int_{\beta} \gamma_{n+1} \right) \cdot I_{0,n,\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n);$$

Envoi au point : Lorsque $\beta = 0$, on doit avoir

$$I_{0,n,0}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \begin{cases} \int_X \gamma_1 \smile \cdots \smile \gamma_n & \sum_i \deg \gamma_i = \dim X \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

Scindage : En notant comme dans le Lemme 3.2 $\varphi: \overline{\mathcal{M}_{0, I_1 \cup \{\bullet\}}} \times \overline{\mathcal{M}_{0, I_2 \cup \{\bullet\}}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{0, n}}$ alors

$$\begin{aligned} & \varphi^* I_{0, n, \beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) \\ &= \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{j, k} g^{jk} I_{0, S_1 \cup \{\bullet\}, \beta_1} \left(\prod_{i_1 \in S_1} \gamma_{i_1} \cdot T_j \right) \\ & \quad \times I_{0, S_2 \cup \{\bullet\}, \beta_2} \left(\prod_{i_2 \in S_2} \gamma_{i_2} \cdot T_k \right). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a les invariants de Gromov–Witten correspondants $\langle I_{0, n, \beta} \rangle(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \int_{\overline{\mathcal{M}_{0, n}}} I_{0, n, \beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$. L'axiome du degré implique que $I_{0, n, \beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ est bien de degré maximal $\dim \overline{\mathcal{M}_{0, n}}$, et donc donne un invariant non nul, si et seulement si $n - 3 = \sum_{i=1}^n \deg \gamma_i - \dim X - \int_{\beta} c_1(X) \iff \sum_{i=1}^n \deg \gamma_i = \dim \overline{\mathcal{M}_{0, n}}(X, \beta)$.

3.3.2 Algèbres et variétés de Frobenius

Définition 3.4 (Algèbre de Frobenius). Une **algèbre de Frobenius** est une \mathbb{C} -algèbre commutative unitaire H (avec unité 1_H) muni d'un accouplement \mathbb{C} -bilinéaire symétrique non dégénéré $\langle \bullet, \bullet \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ tel que pour tous $u, v, w \in H$:

$$\langle uv, w \rangle = \langle u, vw \rangle.$$

En notant $\omega \in H^\vee$ la forme linéaire $u \mapsto \langle 1_H, u \rangle$ on a pour tous u, v que $\omega(uv) = \langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$. On appelle ω la forme de Frobenius. Fixons une base $\{u_i\}_i$ de H . Soit (g_{ij}) la matrice donnée par $g_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$; l'accouplement de Frobenius étant non dégénéré, on peut lui définir une matrice inverse notée (g^{ij}) . On utilisera les matrices (g_{ij}) et (g^{ij}) pour monter et abaisser les indices, en notant par exemple $\sum_j g^{ij} v_j = v^i$ et $\sum_j g_{ij} v^j = v_i$. On appellera un tel accouplement bilinéaire symétrique non dégénéré une **pseudo-métrie**, ou souvent simplement une métrie. Dans la base choisie, on définit également un 3-tenseur $\mathcal{A} : H^{\otimes 3} \rightarrow \mathbb{C}$, de coordonnées \mathcal{A}_{ijk} , tel que \mathcal{A}_{ij}^k fournisse les constantes de structure du produit : $u_i u_j = \sum_k \mathcal{A}_{ij}^k u_k$.

Partant au contraire d'un 3-tenseur symétrique \mathcal{H} et d'une métrie g , on peut définir le produit par la condition $\mathcal{H}(u, v, w) = g(uv, w) = g(u, vw)$ en utilisant la dualisation partielle :

$$H \otimes H \hookrightarrow \text{Sym}^2 H \xrightarrow{\mathcal{H}'} H^\vee \xrightarrow{g'} H : u \otimes v \mapsto uv$$

où $\mathcal{H}'(u \otimes v) : w \mapsto \mathcal{H}(u, v, w)$ pour $u \otimes v \in H \otimes H$ et $w \in H$, et $g'(g'(\eta), w) = \eta(w)$ pour $\eta \in H^\vee$ et $w \in H$.

Définition 3.5 (Variété de Frobenius formelle). Une **variété de Frobenius formelle** est un \mathbb{C} -espace vectoriel H muni d'une métrie g et d'un potentiel

$\Phi \in k[[x_i]]$ (où x_i sont les coordonnées génériques sur une base choisie de H), défini au termes quadratiques (de degré ≤ 2) près, respectant l'équation WDVV, ou en d'autres termes tel que les Φ_{ij}^k soient les constantes de structure d'un produit associatif sur $\mathbb{C}[[x_i]] \otimes_{\mathbb{C}} H$.

Nous voulons interpréter cette définition comme une condition géométrique sur les espaces tangents d'une variété différentiable.

Définition 3.6 (Variété de Frobenius). Une **variété de Frobenius** $(\mathcal{X}, \langle, \rangle, 1)$ est une variété différentiable \mathcal{X} dont chaque espace tangent est muni d'une structure d'algèbre de Frobenius tel que

- le produit de Frobenius définit une métrique plate g sur \mathcal{X} ;
- si $\nabla: \Gamma(T\mathcal{X}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{X}) \otimes \Omega^1(\mathcal{X})$ est la connexion de Levi-Civita pour la métrique de Frobenius, alors $\nabla 1 = 0$: le champ de vecteur unité est covariamment constant;
- pour $\mathcal{A}: (u, v, w) \mapsto \langle uv, w \rangle$, le tenseur $\nabla \mathcal{A} \in \Gamma(T^\vee \mathcal{X}^{\otimes 4})$, agissant en $(u, v, w) \mapsto (z \mapsto (\nabla_z \mathcal{A})(u, v, w))$, est symétrique en ses quatre variables.

On peut choisir un système de coordonnées locales $(x_i)_i$ dans un voisinage de $x \in \mathcal{X}$, et une base holonôme $(\partial_i)_i$ de $T_x \mathcal{X}$. On écrit toujours g_{ij} les composantes de $g(x): T_x \mathcal{X}^{\otimes 2} \rightarrow k$ dans cette base : $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. Les composantes $\mathcal{A}_{ijk} = \langle \partial_i, \partial_j \partial_k \rangle$ de \mathcal{A} donnent les constantes de structure du produit.

La symétrie de $\nabla_\ell \mathcal{A}_{ijk}$ est équivalente à l'existence d'un potentiel $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{A}_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k \Phi$, ou pour tous $u, v, w \in T_x \mathcal{X}$, $\mathcal{A}(u, v, w) = uvw\Phi$. L'associativité du produit revient donc encore une fois aux équations WDVV pour Φ .

Notons ∇^0 la connexion plate ∇ de la définition. On peut définir une famille à un paramètre λ de connexions ∇^λ par $\nabla^\lambda = \nabla^0 + \lambda \Phi$, c'est-à-dire

$$\nabla_u^\lambda v = \nabla_u^0 v + \lambda uv.$$

En écrivant la famille de courbures $\nabla^\lambda \circ \nabla^\lambda = \lambda^2 \mathcal{R}_2 + \lambda \mathcal{R}_1$ (sans terme constant puisque ∇^0 est plate), la symétrie du produit est équivalente à la nullité de \mathcal{R}_1 et son associativité à la nullité de \mathcal{R}_2 [Man99, chapitre 3, théorème 1.5], ce qui signifie que \mathcal{X} est une variété de Frobenius si et seulement si ∇^λ est une famille de connexions plates.

3.3.3 Théories cohomologiques des champs et fonctions de corrélation

Soient H un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $g: H \otimes H \rightarrow \mathbb{C}$ une métrique. Soit $\{T_i\}_i$ une base de H , et soit également $\Delta = \sum_{i,j} g^{ij} T_i \otimes T_j$ l'opérateur de Casimir pour g .

Définition 3.7 (Théorie cohomologique des champs). Une **théorie cohomologique des champs** (CohFT) à l'arbre sur H est une famille d'applications linéaires $I_n: H^{\otimes n} \rightarrow H^\bullet \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, $n \geq 3$ respectant les conditions

- équivariance par rapport à l'action de \mathcal{S}_n ;
- scindage :

$$\varphi^* I_n(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \sum_{j,k} g^{jk} I_{|S_1|+1} \left(\prod_{i_1 \in S_1} \gamma_{i_1} \cdot T_j \right) \otimes I_{|S_2|+1} \left(\prod_{i_2 \in S_2} \gamma_{i_2} \cdot T_k \right)$$

$$\text{où } \varphi: \overline{\mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{\bullet\}}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{\bullet\}}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,n}}.$$

Il est clair que le système des classes de Gromov-Witten cumulées selon $\beta \in H_1 X$ respecte les axiomes d'une CohFT sur $H = A \bullet X$. Toute théorie cohomologique des champs $(I_n)_{n \geq 3}$ donne également lieu à des fonctions $\langle I_n \rangle: H^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\langle I_n \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}_{0,n}}} I_n$. On les appelle les fonctions de corrélation de la CohFT.

Définition 3.8 (Fonction de corrélation abstraite). Un système de **fonctions de corrélation abstraites** est une famille de polynômes \mathcal{S}_n -équivariants (donc invariants) $\langle I_n \rangle: H^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 3$ telle que pour tout $n \geq 4$, tous $a, b, c, d \in [1, n]$ distincts deux-à-deux et tous $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H$,

$$\sum_{\sigma} (\langle I_{|S_1|+1} \rangle \otimes \langle I_{|S_2|+1} \rangle) \left(\bigotimes_{i_1 \in S_1} \gamma_{i_1} \otimes \Delta \otimes \bigotimes_{i_2 \in S_2} \gamma_{i_2} \right) = (b \leftrightarrow c)$$

où σ sont les partitions $[1, \dots, n] = S_1 \sqcup S_2$ stables (*i.e.* telles que $|S_s| \geq 2$ pour $s = 1, 2$) et $a, b \in S_1, c, d \in S_2$ ou le contraire (dans le membre de gauche ; dans celui de droite ce serait $a, c \in S_1, b, d \in S_2$ ou le contraire).

Théorème 3.3 ([Man99, chapitre III, théorème 4.3 (p. 100 ; preuve en §4.9 p. 109)], [KM94, théorème 8.3 (preuve en §8.7)]). *Tout système de fonctions de corrélations abstraites est donné par les fonctions de corrélation d'une théorie cohomologique des champs déterminée de manière unique.* \square

Théorème 3.4. *Soit (H, g) tel que dans les Définitions un espace vectoriel H muni d'une métrique g . Alors les ensembles de structures de variété de Frobenius formelle et de systèmes de fonctions de corrélation sur (H, g) sont en bijection.*

Démonstration. Dans $\mathbb{C}[[x_i]]$, on considère les coordonnées génériques x_i et leurs puissances comme des éléments de H^\vee et leurs puissances tensorielles symétriques. On peut donc écrire $\Phi \in \mathbb{C}[[x_i]]$, défini modulo les termes quadratiques, sous la forme $\Phi = \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} C_n$ pour certains $C_n \in (H^\vee)^{\otimes n}$.

On note toujours $\{T_i\}_i$ une base de H , et soit $\gamma = \sum_i x_i T_i$. On rappelle que dans l'écriture ci-dessus, $\Phi_{ijk}(\gamma) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} C_{n+3}(\gamma^{\otimes n} \otimes T_i \otimes T_j \otimes T_k)$. L'équation WDVV d'associativité pour que Φ définisse une structure de variété de

Frobenius formelle devient alors, pour tous i, j, k, ℓ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m, p \geq 0 \\ s, t}} \frac{1}{m!} C_{m+3}(\gamma^{\otimes m} \otimes T_i \otimes T_j \otimes T_s) g^* \frac{1}{p!} C_{p+3}(\gamma^{\otimes p} \otimes T_t \otimes T_k \otimes T_\ell) \\ &= \sum_{m, p} \frac{1}{m! p!} (C_{m+3} \otimes C_{p+3}) \left(\gamma^{\otimes m} \otimes T_i \otimes T_j \otimes \sum_s T_s \otimes T^s \otimes T_k \otimes T_\ell \otimes \gamma^{\otimes p} \right) \\ &= (i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i), \end{aligned}$$

où l'on reconnaît $\sum_s T_s \otimes T^s = \Delta$.

Soit $(\langle I_n \rangle)_{n \geq 3}$ un système de fonctions de corrélations; on lui associe le potentiel $\Phi = \sum_n \frac{\langle I_n \rangle}{n!}$, qui est entièrement déterminé par ses termes des différents degrés : la correspondance (fonctions de corrélations abstraites) \rightarrow (potentiels) est injective et il reste à montrer que son image est l'ensemble des potentiels définissant une structure de variété de Frobenius formelle, *i.e.* respectant l'équation obtenue ci-dessus.

Dans l'équation des fonctions de corrélation abstraites, choisissons un $n \geq 4$, et fixons $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\gamma, \dots, \gamma, T_i, T_j, T_k, T_\ell)$ et $(a, b, c, d) = (n-3, n-2, n-1, n)$, c'est-à-dire que l'on sépare T_i, T_j d'un côté des partitions et T_k, T_ℓ de l'autre. On y reconnaît alors les termes $m+p+2 = n$ de l'équation des variétés de Frobenius formelles. Pour un couple (m, p) donné, le nombre de partitions de $[1, n]$ correspondantes est le nombre de placements des $T_{i,j,k,\ell}$ parmi les γ (par \mathcal{S}_n -invariance de part et d'autre du Δ), et il s'agit de $\binom{n-2}{m} = \binom{n-2}{p}$, ce qui à multiplication par $(n-2)!$ près donne bien une correspondance entre les termes des équations de fonctions de corrélation et de variétés de Frobenius.

À l'inverse, en partant de $\Phi = \sum \frac{C_n}{n!}$, on obtient en suivant le raisonnement inverse une partie des relations de l'équation pour les fonctions de corrélation, qui s'étendent à l'ensemble des relations voulues par polarisation grâce à la multilinéarité des C_n . \square

- On a donc une correspondance biunivoque entre les structures suivantes :
- théories cohomologiques des champs;
 - systèmes de fonctions de corrélations abstraites;
 - variétés de Frobenius formelles.

Bibliographie

- [CK99] David COX et Sheldon KATZ. “Gromov-Witten Invariants, Quantum Cohomology”. In : *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*. American Mathematical Society, 1999. Chap. 7,8.
- [DM69] Pierre DELIGNE et David MUMFORD. “The irreducibility of the space of curves of given genus”. eng. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 36 (1969), p. 75–109. EuDML : 103899.
- [Dub96] Boris DUBROVIN. “Geometry of 2-D topological field theories”. In : *Integrable systems and quantum groups. Proceedings, 1st Session, Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME), Montecatini Terme, Italy, June 14-22, 1993*. T. 1620. 1996, p. 120–348. DOI : 10 . 1007 / BFb0094793. arXiv : hep-th/9407018 [hep-th].
- [FP96] William FULTON et Rahul PANDHARIPANDE. *Notes on stable maps and quantum cohomology*. Août 1996. arXiv : alg-geom/9608011.
- [Ful98] William FULTON. *Intersection theory*. second. Springer, 1998.
- [Har77] Robin HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [Kee92] Sean KEEL. “Intersection Theory of Moduli Space of Stable N-Pointed Curves of Genus Zero”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 330.2 (1992), p. 545–574. ISSN : 00029947. JSTOR : 2153922.
- [KM94] M. KONTSEVICH et Yu. MANIN. “Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry”. In : *Comm. Math. Phys.* 164.3 (1994), p. 525–562. Project Euclid : 1104270948.
- [Knu83] Finn F. KNUDSEN. “The projectivity of the moduli space of stable curves, II : The stacks \mathcal{M}_g ...”. In : *Mathematica Scandinavica* 52 (1983), p. 161–199. EuDML : 166839.
- [KV07] Joachim KOCK et Israel VAINSENER. *An Invitation to Quantum Cohomology. Kontsevich’s Formula for Rational Plane Curves*. Birkhäuser, 2007.
- [Lip69] Joseph LIPMAN. “Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization”. eng. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 36 (1969). §24, p. 256–268. EuDML : 103893.

- [Man99] Yuri MANIN. *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli Spaces*. American Mathematical Society, 1999.
- [nLa] nLAB. *Embedding*. Version du 10 nov. 2013. URL : <https://ncatlab.org/nlab/show/embedding>.
- [Vak05] Ravi VAKIL. "The Moduli Space of Curves and Gromov-Witten Theory". In : *Enumerative Invariants in Algebraic Geometry and String Theory*. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Certraro, Italy, June 6–11, 2005. Sous la dir. de K. BEHREND et M. MANETTI. Springer-Verlag, 2005. arXiv : math/0602347.
- [Voig6] Claire VOISIN. "Symétrie miroir". In : *Panoramas et Synthèses* (1996). Sous la dir. de Société Mathématique de FRANCE.
- [Wit91] Edward WITTEN. "Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space". In : *Surveys in Diff. Geom* 1.243 (1991), p. 74.

Index

- $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$
- $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, 25
- $\mathcal{M}_{g,n}$
- $\mathcal{M}_{0,n}$, 18
- algèbre de Frobenius, 55
- anneau
 - de coordonnées, 3
 - gradué, 3
 - local, 4
 - régulier, 7
- anneau de Chow, 13
- application
 - birationnelle, 4
 - dominante, 4
 - rationnelle, 4
 - stable, 34
- arbre de lignes projectives, 23
- branchette, 23
- cap-produit, 13
- classe fondamentale, 12
- codimension, 8
- compactification, 22
- contraction, 25
- coordonnées homogènes, 2
- courbe
 - birationnelle, 4
 - préstable, 23
 - stable, 23
- cup-produit, 13
- quantique, 53
- cycle, 11
 - de bord, 30
 - image directe, 11
 - image inverse, 11
- cône, 7
 - normal, 12
- dimension, 8
- diviseur, 11
 - $[\text{div}(\tau)]$, 11
 - de bord, 30
 - exceptionnel, 10
- ensemble algébrique, 3
- espace
 - annelé, 5
 - localement annelé, 5
- espace affine, 2
- espace projectif, 2
- faisceau, 5
 - $\Gamma(U, -)$, 4
 - \mathcal{O}_X -module, 6
 - $f^*\mathcal{F}$, 7
 - $f_*\mathcal{F}$, 4
 - cohérent, 6
 - invertible, 6
 - localement libre, 6
 - préfaisceau, 4
 - quasicohérent, 6
 - section, 4
 - tige, 5
 - tordu, $\mathcal{F}(d)$, 6
- faisceautisé, 5
- famille, 15
 - de courbes, 18
 - de courbes stables, 25
 - tautologique, 16
 - universelle, 16
- famille \mathbf{t} -rigide, 35
- fibre, 15

- fonction
 - rationnelle, 4
 - régulière, 3
- fonction de corrélation abstraite, 57
- fonction génératrice, 50
- graphe dual, 23
- homographie, 19
- immersion, 8
- invariant de Gromov–Witten, 49
- irréductible, 3
- longueur, 11
- modules
 - champ de, 18
 - espace de, 15, 17
 - problème de, 15
- monomorphisme
 - effectif, 21
 - régulier, 21
- morphisme
 - d’espaces annelés, 5
 - d’espaces localement annelés, 5
 - de schémas, 5
 - de type fini, 9
 - de variétés, 4
 - dimension relative, 9
 - plat, 9
 - projectif, 9
 - propre, 9
 - séparé, 9
- ordre, 11
- plongement, 22
- point
 - fermé, 7
 - générique, 7
 - marqué, 18
 - non singulier, 7
 - spécial, 23
- potentiel de Gromov–Witten, 51
 - classique, 51
- produit d’intersection, 13
- pseudo-métrique, 55
- rapport anharmonique, 20
- schéma, 5
 - affine, 5
 - intègre, 7
 - noethérien, 7
 - projectif, 9
 - réduit, 7
- spectre, 5
 - global, relatif, 7
- stabilisation, 26
- stratification, 29
- théorie cohomologique des champs, 56
- triplet standard, 19
- variété
 - abstraite, 9
 - affine, 3
 - algébrique, 3
 - projective, 3
 - quasi-affine, 3
 - quasi-projective, 3
 - variété de Frobenius, 56
 - formelle, 55
- WDVV, 53
- Zariski
 - topologie de, 3, 5
- éclatement, 10
- équivalence
 - birationnelle, 4
 - projective, 19